

10.2 一次元圧縮性流れ

図10.4に示すように、管路内の断面積が緩やかに変化する場合の流れの速度、圧力、密度、温度などが管軸方向には変化するが、管軸に垂直な断面内では変化しない一様な流れを**一次元圧縮性流れ** (one-dimensional compressible flow) という。ここで取り扱う気体は完全気体とし、流れは一次元の定常で、断熱変化をする等エントロピー流れであるとする。このような理論的な流れの取り扱い、実際の粘性をもつ流れにおいても**断熱流れ** (adiabatic flow) であれば近似的に成立すると考えてよい。

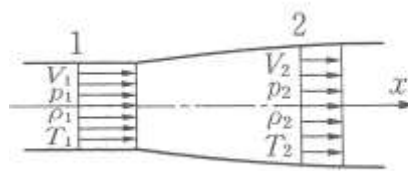


図 10.4 一次元流れ

10.2.1 エネルギーの式

流れが定常で断熱的である場合には、気体のエンタルピーを h (J/kg) とすると、エネルギーの保存則である熱力学第1法則を用いて、次のエネルギー式が成立する。

$$h + \frac{V^2}{2} = \text{const} \quad (10.39)$$

式(10.39)に、式(10.10)と(10.15)を代入すると

$$c_p T + \frac{V^2}{2} = \text{const} \quad (10.40)$$

$$\frac{\kappa}{\kappa-1} RT + \frac{V^2}{2} = \text{const} \quad (10.41)$$

$$\frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} = \text{const} \quad (10.42)$$

となる。この式は、流れに粘性がある場合や、次の10.3節で述べる衝撃波が生

じてエントロピーが増加するような不可逆変化の場合でも成立する。なお，速度と音速の関係は，式(10.33)より

$$\frac{a^2}{\kappa-1} + \frac{V^2}{2} = c \text{ o r} \quad (10.43)$$

となる。



図 10.5 よどみ点状態

図 10.5(a)に示すように，流れの中に置かれた円柱の前方 A 点では，速度は $V=0$ となり，この点を**よどみ点** (stagnation point) と呼ぶ。よどみ点における圧力，温度を**よどみ点圧力** (stagnation pressure)，**よどみ点温度** (stagnation temperature)，あるいは，**全圧** (total pressure)，**全温度** (total temperature) という。なお，流れている流体の圧力や温度を全圧や全温度と区別して，**静圧** (static pressure) および**静温度** (static temperature) という。いま，図 10.5(b)に示すように，よどみタンクから気体が噴出する場合を考えると，式(10.42)より

$$\frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} = \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p_0}{\rho_0} \quad (10.44)$$

上式は，式(10.1)，(10.13)を用いると

$$C_p T + \frac{V^2}{2} = C_p T_0 \quad (10.45)$$

$$\text{あるいは， } T + \frac{V^2}{2C_p} = T_0 \quad (10.46)$$

となる。ここで， T は静温度， $V^2/2C_p$ は動温度， T_0 は全温度である。これらの式と式(10.13)，(10.21)，(10.22)，および式(10.33)，(10.37)などより，次の重

要な式が導かれる。

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{\kappa-1}{2} M^2 \quad (10.47)$$

$$\frac{p_0}{p} = \left(1 + \frac{\kappa-1}{2} M^2\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \quad (10.48)$$

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left(1 + \frac{\kappa-1}{2} M^2\right)^{\frac{1}{\kappa-1}} \quad (10.49)$$

10.2.2 等エントロピー流れおよび管路の断面積変化と状態量の関係

図 10.4 に示したような断面積 A が緩やかに変化する管路内の一次元圧縮性流れが、断面積の変化によってどのように変化するかを調べる。流れは、断熱でエントロピーが一定に保たれる**等エントロピー流れ** (isentropic flow) であるとす。この場合の基礎式は

$$\text{連続の式: } \rho VA = \text{const} \quad (10.50)$$

$$\text{運動方程式: } V \frac{dV}{dx} + \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = 0 \quad (10.51)$$

$$\text{等エントロピーの式: } \frac{p}{\rho^\kappa} = \text{const} \quad (10.52)$$

$$\text{状態方程式: } p = \rho RT \quad (10.53)$$

であり、これらの式を微分形で表示すると

$$\text{連続の式: } \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dV}{V} + \frac{dA}{A} = 0 \quad (10.54)$$

$$\text{運動方程式: } VdV + \frac{dp}{\rho} = 0 \quad (10.55)$$

$$\text{等エントロピーの式: } \frac{dp}{p} - \kappa \frac{d\rho}{\rho} = 0 \quad (10.56)$$

$$\text{状態方程式: } \frac{dp}{p} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dT}{T} \quad (10.57)$$

となる。次に、等エントロピー流れにおける管路断面積変化 dA/A と状態量の変化の関係を調べてみよう。音速の式、 $a^2 = dp/d\rho$ を用いて、式(10.55)を書き換ええると

$$V d \sqrt{a^2} \frac{d\rho}{\rho} = 0 \quad (10.58)$$

これに、 $M = V/a$ の関係を用いると

$$\frac{d\rho}{\rho} = -M^2 \frac{dV}{V} \quad (10.59)$$

式(10.59)と(10.54)より

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{M^2}{M^2-1} \frac{dA}{A} \quad (10.60)$$

式(10.60)と(10.56)より

$$\frac{dp}{p} = -\frac{\kappa M^2}{M^2-1} \frac{dA}{A} \quad (10.61)$$

式(10.60)と(10.59)より

$$\frac{dV}{V} = \frac{1}{M^2-1} \frac{dA}{A} \quad (10.62)$$

式(10.57)に式(10.60)と(10.61)を用いて

$$\frac{dT}{T} = -\frac{(\kappa-1)M^2}{M^2-1} \frac{dA}{A} \quad (10.63)$$

さらに、 $a^2 = \kappa RT$ を対数微分して、式(10.63)を用いると

$$\frac{da}{a} = -\frac{(\kappa-1)M^2}{2(M^2-1)} \frac{dA}{A} \quad (10.64)$$

同様に、 $M = V/a$ を対数微分して、式(10.62)、(10.64)を用いると

$$\frac{dM}{M} = \frac{2+(\kappa-1)M^2}{2(M^2-1)} \frac{dA}{A} \quad (10.65)$$

となる。式(10.60)～(10.65)でわかるように、等エントロピー流れでは、断面積の変化によって、気体の状態量や速度、マッハ数などに影響を及ぼす。これら

の式から得られる状態量の変化を調べることができる。

図 10.6 に、管路断面積の変化が、等エントロピー流れに及ぼすノズルとディフューザ内の流れを示す。



図 10.6 管路断面積変化の等エントロピー流れの様子

流れを加速するための**ノズル** (nozzle)，および減速するための**ディフューザ** (diffuser) は、亜音速と超音速では、形状が逆であることがわかる。

超音速流れを連続的に得るためには、図 10.7 に示すような、ノズルの途中に最小断面積の**スロート** (throat) をもつ**ラバルノズル** (Laval nozzle) を用いる必要がある。

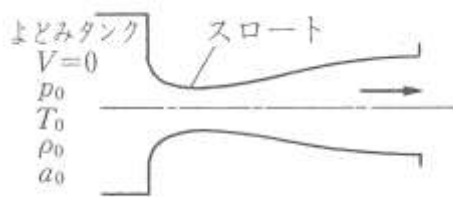


図 10.7 ラバルノズル

10.2.3 臨界状態および管路の断面積比とマッハ数の関係

流れの速度 V が音速 a に等しくなった状態、すなわち $M=1$ の状態を**臨界状態** (critical state) という。臨界状態は、ラバルノズルの最小断面積のスロート部で生じる。 $M=1$ の臨界状態における空気の流れの状態量に*の記号を付けて、等エントロピー流れのよどみ点状態と臨界状態の関係式を求めてみよう。式(10.47), (10.48), および式(10.49)において, $M=1$, $\kappa=1.4$ とすると

$$\frac{T^*}{T_0} = \frac{2}{\kappa+1} = 0.833 \quad (10.66)$$

$$\frac{p^*}{p_0} = \left(\frac{2}{\kappa+1} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} = 0.528 \quad (10.67)$$

$$\frac{\rho^*}{\rho_0} = \left(\frac{2}{\kappa+1} \right)^{\frac{1}{\kappa-1}} = 0.634 \quad (10.68)$$

の関係式が得られる。式(10.67)より, **臨界圧力** (critical pressure) p^* が $p^*=0.528p_0$ のときに流れはスロートで閉そく, すなわち**チヨーク** (choke) して $M=1$ の流れとなる。

次に, 管路内の等エントロピー流れの $M=1$ の臨界状態における断面積 A^* と, 任意のマッハ数 M における断面積 A との関係式を求めてみよう。連続の式より, 質量流量は

$$\rho VA = \rho^* V^* A^*$$

であるから

$$\frac{A}{A^*} = \frac{\rho^* V^*}{\rho V} = \frac{\rho^* \rho_0 V^* a^* a_0 a}{\rho_0 \rho a^* a_0 a V} \quad (10.69)$$

上式の ρ^*/ρ_0 および ρ_0/ρ は, それぞれ式(10.68), (10.49)を, a^*/a_0 および a_0/a は, 式(10.34), (10.66)を用いて, また, $V^*/a^*=1$, $a/V=1/M$ であるから, これらを式(10.69)に代入して, 整理すると

$$\frac{A}{A^*} = \frac{1}{M} \left\{ \frac{(\kappa-1)M^2 + 2}{\kappa+1} \right\}^{\frac{\kappa+1}{2(\kappa-1)}} \quad (10.70)$$

の関係式が得られる。この式より, 断面積比 A/A^* が与えられると, マッハ数

が求められ、あるマッハ数に対しては、断面積比を決定することができる。なお、断面積比と圧力比の関係は、式(10.48)から M を消去すると

$$\frac{A}{A^*} = \left(\frac{\kappa-1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{\kappa+1}\right)^{\frac{\kappa+1}{2(\kappa-1)}} \left\{ 1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right\}^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{p}{p_0}\right)^{-\frac{1}{\kappa}} \quad (10.71)$$

となる。

10.2.4 先細ノズル内の流れ

図 10.8(a)に示すように、出口部の断面積 A_e が最小となるようなノズルを**先細ノズル** (converging nozzle) といい、よどみタンクから流出する等エントロピー流れを考える。いま、ノズルの外側の圧力、すなわち**背圧** (back pressure) p_b をよどみタンクの圧力 p_0 から少しずつ減少させていく場合を考える。

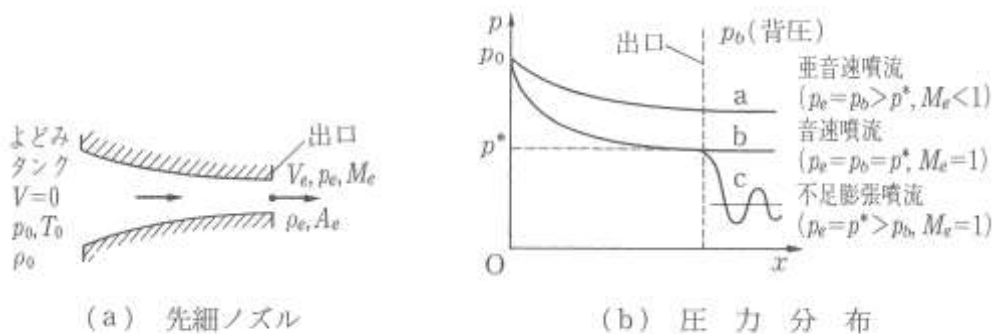


図 10.8 先細ノズルの流れ

(1) 亜音速噴流 ($p_e = p_b > p^*$, $M_e < 1$)

背圧 p_b が臨界圧力 p^* よりも高く、ノズル出口の圧力 p_e と背圧が等しい $p_e = p_b$ の場合の流れは、図 10.8(b)の曲線 a に示すような圧力分布となる。ノズル内では亜音速の流れであり、当然、ノズル出口で $M_e < 1$ の**亜音速噴流** (subsonic jet) となる。エネルギーの式(10.44)、および等エントロピーの関係式(10.23)をよど

みタンクとノズル出口に適用するために V , ρ , p をそれぞれ V_e , ρ_e , p_e に置き換えると

$$\frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p_e}{\rho_e} + \frac{V_e^2}{2} = \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p_0}{\rho_0}$$

$$\frac{p_e}{\rho_e^\kappa} = \frac{p_0}{\rho_0^\kappa}$$

となるから、これらの2式より

$$V_e = \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa-1} \frac{p_0}{\rho_0} \left\{ 1 - \left(\frac{p_e}{p_0} \right)^{(\kappa-1)/\kappa} \right\}} \quad (10.72)$$

ノズルを通過する単位時間当りの質量流量 m は

$$m = \rho_e V_e A_e = \frac{A_e p_0}{\sqrt{RT_0}} \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa-1} \left\{ \left(\frac{p_e}{p_0} \right)^{2/\kappa} - \left(\frac{p_e}{p_0} \right)^{(\kappa+1)/\kappa} \right\}} \quad (10.73)$$

となる。

(2) 音速噴流 ($p_e = p_b = p^*$, $M_e = 1$)

背圧 p_b が臨界圧力 p^* に等しく、さらに、ノズル出口の圧力と背圧が等しい $p_e = p_b$ の臨界状態の流れは、 $M_e = 1$ の**音速噴流** (sonic jet) となる。すなわち、出口でチョークした流れとなる。いま、式(10.67)において、 $p^* = p_b$ であるから

$$\frac{p_b}{p_0} = \frac{p^*}{p_0} = \left(\frac{2}{\kappa+1} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} = 0.528 \quad (10.74)$$

ノズル出口の速度 V_e^* は、式(10.72)において、 $p_e = p^*$ とすると

$$V_e^* = \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa+1} \frac{p_0}{\rho_0}} = a_0 \sqrt{\frac{2}{\kappa+1}} = 0.913 a_0 \quad (\kappa=1.4) \quad (10.75)$$

また、 $p_b = p^*$ のときの、単位時間当りの質量流量 m は、式(10.73)、(10.74)より

$$m = \frac{A_e p_0}{\sqrt{RT_0}} \sqrt{\kappa \left(\frac{2}{\kappa+1} \right)^{(\kappa+1)/(\kappa-1)}} = 0.685 \frac{A_e p_0}{\sqrt{RT_0}} \quad (\kappa=1.4) \quad (10.76)$$

となる。

(3) 不足膨張噴流 ($p_e = p^* > p_b, M_e = 1$)

背圧 p_b が臨界圧力 p^* よりも低く、ノズル出口圧力が臨界圧力に等しい $p_e = p^*$ の場合の流れは、図 10.8(b) に示す曲線 c のような圧力分布となる。なお、ノズル内の流れは、ノズル出口のスロート部で $M_e = 1$ の音速となるので、音速噴流における $p_b = p^*$ の場合と同じである。この場合、背圧 p_b を臨界圧力 p^* より低くしても、ノズル内の圧力は、背圧まで膨張することはできず、ノズル出口の圧力 $p_e (= p^*)$ は、背圧 p_b よりも低くなることはない。このような膨張を**不足膨張** (under expansion) といい、ノズルから噴出される噴流は、背圧 p_b まで膨張を続けて超音速流となり、膨張波を伴う複雑な**不足膨張噴流** (under expanded jet) となる。また、ノズル内では曲線 b と c は一致しており、ノズルの出口速度 V_e や質量流量 m_e は、式(10.75)、(10.76)と同じである。

10.2.5 ラバルノズル内の流れと噴流の形態

図 10.9 に示すように、超音速流を得るためのラバルノズル内の等エントロピー流れ、およびラバルノズルから噴出する流れの形態について調べてみよう。

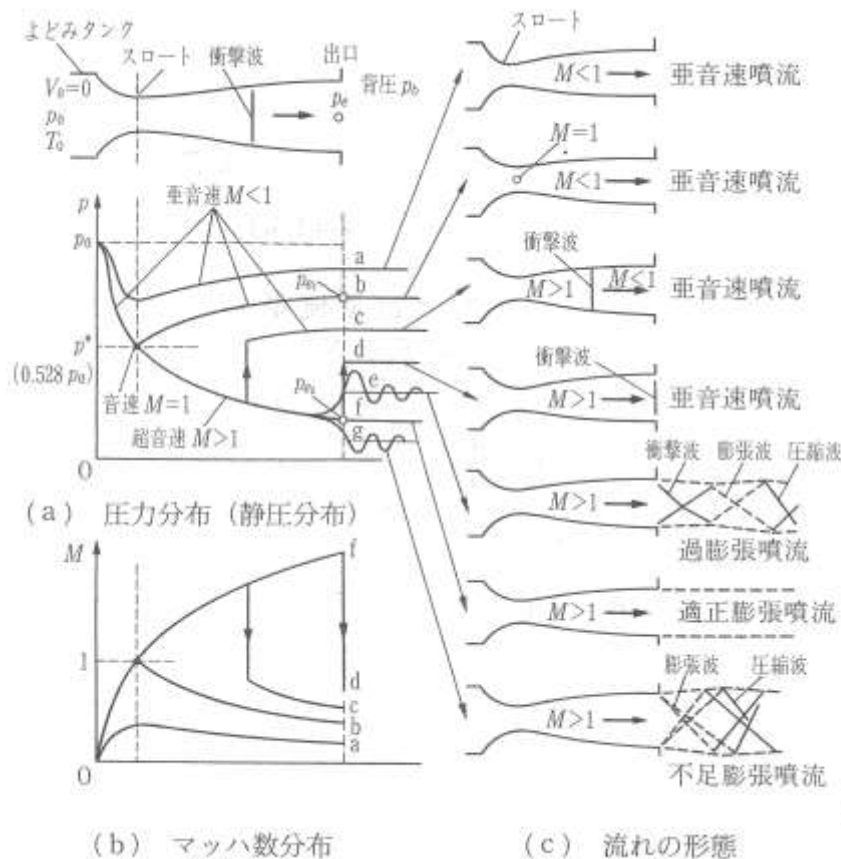
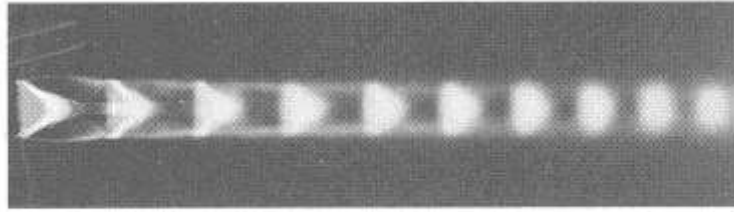
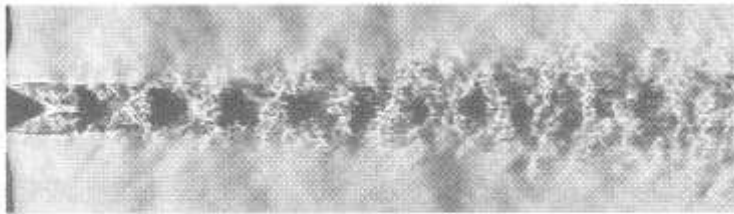


図 10.9 ラバルノズル内の流れ

図 10.9(a)の圧力分布の曲線 a に示すように、背圧 p_b をよどみ圧力 p_0 よりも低くすると流れが生じるが、ラバルノズル内の流れは全域で亜音速流となる。背圧をさらに低くすると曲線 b に示すように、流れは、スロートで $p^*/p_0=0.528$ の臨界状態となり、 $M=1$ の音速（臨界流）に達するが、それより下流では亜音速流となる。さらに圧力を低くすると、曲線 c の状態になる。スロートを過ぎた流れは超音速となるが、ノズルの広がり部で衝撃波が生じて圧力は不連続的に増大し、その下流側で亜音速に減じる。圧力をさらに低くしていくと、この衝撃波は下流に移動し、ついには曲線 d の状態になり、出口部において垂直衝撃波の生じる流れとなる。ノズル出口の圧力が背圧よりも低くなると、曲線 e に示すように、流れはノズル内で背圧以下まで膨張、すなわち、**過膨張**（over expansion）する。このとき、ノズルから噴出される流れは、超音速の**過膨張噴流**（over expanded jet）となり、出口に斜め衝撃波が生じる。次に、曲線 f に示す出口の圧力が背圧 p_b と等しくなるときを**適正膨張**（correct expansion）といい、ノズルから噴出される流れは、超音速となる。このような流れを**適正膨張噴流**（correct expanded jet）という。なお、曲線 g に示すように、ノズル出口の圧力が背圧よりも高くなると、ノズル内の圧力は背圧まで膨張できないので**不足膨張**（under expansion）という。ノズルから噴出される流れは、出口から膨張波が発生して衝撃波を伴った超音速となり、このような流れを**不足膨張噴流**（under expanded jet）という。すなわち、ラバルノズルから噴出される超音速噴流には、出口圧力 p_e と背圧 p_b との大きさの違いにより、3種類に区別される。 $p_e < p_b$ の場合には過膨張噴流、 $p_e = p_b$ の場合には適正膨張噴流、 $p_e > p_b$ の場合には不足膨張噴流という。なお、これらはいずれも超音速であることから、例えば、**不足膨張超音速噴流**（under expanded supersonic jet）などと呼ばれている。図 10.10(a), (b)に、シュリーレン法によって撮影された不足膨張超音速噴流の流れのようすを示す。図 10.10(a)は、時間平均的な流れを、図(b)は、瞬間的な流れを示す。噴流中には多数の衝撃波群が発生し、図 10.9(a)の曲線 g に示すような圧力変動をもつ複雑な流れとなる。



(a) 時間平均的な流れ



(b) 瞬間的な流れ

図 10.10 不足膨張超音速噴流 (近畿大学 児島忠倫教授提供)

表 10.1 に、ラバルノズルの出口マッハ数 M_e に対する出口断面積 A_e とスロート断面積 A^* の比 A_e/A^* ， および出口圧力比 p_{e1}/p_0 ， p_{e2}/p_0 の値を示す。これらの値は、式(10.70)， (10.71)から求められ、それぞれ超音速、亜音速の値が示されている。

表 10.1 ラバルノズルの作動特性 ($\kappa=1.4$)

M_e (超音速流)	p_{e2}/p_0 (超音速流)	A_e/A^*	M_e (亜音速流)	p_{e1}/p_0 (亜音速流)
1.0	0.528 3	1.000	1.000	0.528 3
1.3	0.360 9	1.066	0.743	0.693 0
1.5	0.272 4	1.176	0.610	0.777 6
1.6	0.235 3	1.250	0.553	0.812 3
1.7	0.202 6	1.338	0.501	0.842 4
1.8	0.174 0	1.439	0.454	0.868 2
1.9	0.149 2	1.555	0.411	0.890 2
2.0	0.127 8	1.687	0.372	0.908 8
2.1	0.109 4	1.837	0.337	0.924 4
2.2	0.093 5	2.005	0.305	0.937 5
2.3	0.080 0	2.193	0.276	0.948 4
2.4	0.068 4	2.403	0.250	0.957 5
2.5	0.058 5	2.637	0.226	0.965 0
2.7	0.043 0	3.183	0.186	0.976 3
3.0	0.027 2	4.235	0.138	0.986 7

10.3 衝撃波

衝撃波 (shock wave) は、ラバルノズル内や超音速流中に置かれた物体まわり、さらに爆発現象などのように、流体中のエネルギー変化が急激に変化した場合に生じる。衝撃波の厚さは非常に薄く、この層の中では、圧力、温度、密度などの状態量が不連続的に急激に変化し、不可逆変化となる。工学的には、衝撃波内部の詳細な構造よりも、衝撃波前後での流れの圧力、速度、密度や温度などの状態量の関係が重要であるので、これらの関係を調べてみよう。

10.3.1 垂直衝撃波

衝撃波の波面が流線に対して垂直なものを、**垂直衝撃波** (normal shock wave) という。ここでは、垂直衝撃波前後の状態量の変化について調べてみよう。

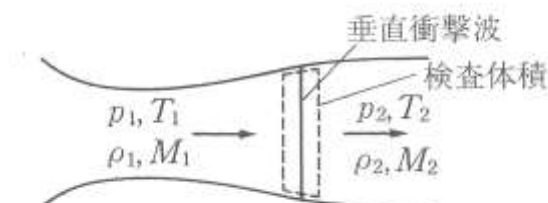


図 10.11 垂直衝撃波の検査体積

(1) 垂直衝撃波の基礎式

図 10.11 に示すように、垂直衝撃波を囲む検査体積をとると、垂直衝撃波前後の流れには、次の基礎式が成立する。

$$\text{連続の式: } \rho_1 V_1 = \rho_2 V_2 \quad (10.77)$$

$$\text{運動量の式: } p_1 + \rho_1 V_1^2 = p_2 + \rho_2 V_2^2 \quad (10.78)$$

$$\text{エネルギーの式: } \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{1}{2} V_1^2 = \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{1}{2} V_2^2 = \frac{\kappa+1}{2(\kappa-1)} a^*{}^2 \quad (10.79)$$

(2) プラントルの式

式(10.77), (10.78), (10.79)を用いて整理すると

$$V_1 V_2 = a^{*2} \quad (10.80)$$

が得られる。すなわち、垂直衝撃波前後の速度の積は一定であり、臨界音速の2乗に等しい。この式を**プラントルの式** (Prandtl's equation) という。なお、圧縮性の流れにおいては、マッハ数 $M=V/a$ は重要な無次元数であるが、臨界状態の臨界マッハ数を M^* 、音速を a^* として

$$M^* = \frac{V}{a^*} \quad (10.81)$$

を用いると便利な場合がある。いま、この臨界マッハ数を用いると、式(10.80)は

$$M_1^* M_2^* = 1 \quad (10.82)$$

となる。この式は、衝撃波の上流が亜音速流のときには、下流は超音速流であり、また、上流が超音速流のときには、下流は亜音速流であることを意味している。なお、臨界マッハ数 M^* と M との関係は

$$M^{*2} = \frac{(\kappa+1)M^2}{2+(\kappa-1)M^2} \quad (10.83)$$

となる。

(3) 垂直衝撃波に関する式

垂直衝撃波前後の状態量を求めるには、衝撃波上流のマッハ数 M_1 の関数で表すのが実用上便利である。衝撃波前後のマッハ数、温度比、圧力比、および密度比の関係はそれぞれ次のように表される。

マッハ数 M_2 は、式(10.83)を(10.82)に代入して整理すると

$$M_2^2 = \frac{2+(\kappa-1)M_1^2}{2\kappa M_1^2 - (\kappa-1)} \quad (10.84)$$

となる。温度比 T_2/T_1 は、式(10.47)を展開した式

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{(\kappa-1)M_1^2 + 2}{(\kappa-1)M_2^2 + 2}$$

に式(10.84)の M_2 を代入して整理すると

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{\{2\kappa M_1^2 - (\kappa - 1)\} \{(\kappa - 1) M_1^2 + 2\}}{(\kappa + 1)^2 M_1^2} \quad (10.85)$$

となる。圧力比 p_2/p_1 は、式(10.78)の V^2 に式(10.34), (10.37)から得られる $V = M\sqrt{\kappa p/\rho}$ を代入して得られた次の式

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{1 + \kappa M_1^2}{1 + \kappa M_2^2}$$

に、式(10.84)の M_2 を代入して整理すると

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2\kappa M_1^2 - (\kappa - 1)}{\kappa + 1} \quad (10.86)$$

となる。さらに、衝撃波前後の密度比 ρ_2/ρ_1 は、状態方程式(10.1)より得られる $\rho_2/\rho_1 = (p_2/p_1)(T_1/T_2)$ に式(10.85)と(10.86)を代入して

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{V_1}{V_2} = \frac{(\kappa + 1)M_1^2}{(\kappa - 1)M_1^2 + 2} \quad (10.87)$$

となる。衝撃波が生じているときには、 $p_2/p_1 > 1$ であるから、式(10.86)において、 $M_1 > 1$ となる。また、式(10.84)において、 $M_1 > 1$ の場合には、 $M_2 < 1$ となる。これらのことから、 $M > 1$ の超音速流が垂直衝撃波を通過すると、亜音速に減じることがわかる。

次に、衝撃波によるエントロピー変化 $s_2 - s_1$ は、式(10.20)より

$$\frac{s_2 - s_1}{R} = \ln \left\{ \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{\kappa/(\kappa-1)} \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{-1} \right\} \quad (10.88)$$

となる。この式(10.88)に $T_2/T_1 = (p_2/p_1)(\rho_1/\rho_2)$ の関係を代入すると

$$\frac{s_2 - s_1}{R} = \ln \left\{ \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} \right)^{\kappa/(\kappa-1)} \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{1/(\kappa-1)} \right\} \quad (10.89)$$

となる。さらに、衝撃波によるエントロピー変化 $s_2 - s_1$ を M_1 で表すには、式(10.89)に式(10.86), (10.87)を代入すると、

$$\frac{s_2 - s_1}{R} = \frac{\kappa}{\kappa - 1} \ln \left\{ \frac{(\kappa - 1)M_1^2 + 2}{(\kappa + 1)M_1^2} \right\} + \frac{1}{\kappa - 1} \ln \left\{ \frac{2\kappa M_1^2 - (\kappa - 1)}{\kappa + 1} \right\} \quad (10.90)$$

となる。

(4) ランキン・ユゴニオの式

衝撃波前後の状態量の変化は、次の式からも求められる。式(10.86), (10.87)より

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{p_2 + \frac{\kappa-1}{\kappa+1} p_1}{\kappa+1}}{\frac{\kappa-1}{\kappa+1} \frac{p_2}{p_1} + 1} \quad (10.91)$$

この式は、衝撃波前後の圧力比と密度比を表す重要な式で、**ランキン・ユゴニオの式** (Rankine-Hugoniot equation) という。

10.3.2 斜め衝撃波

図 10.12(a)～(c)に示すように、超音速流の中にくさび形状や鈍頭形状の物体が置かれたり、あるいは超音速流が凹壁面を通過するときには、流れに傾斜した衝撃波が発生する。このような衝撃波を**斜め衝撃波** (oblique shock wave) という。特に、くさびの半頂角 θ が小さいときには、先端に付着した**弱い衝撃波** (weak shock wave) が生じる。このような衝撃波を**付着衝撃波** (attached shock wave) という。半頂角 θ が大きくなり、図(c)のような鈍頭物体では、先端から離れた**強い衝撃波** (strong shock wave) の**離脱衝撃波** (detached shock wave) が発生する。弓形の形状をしている場合には、**弓形離れ衝撃波** (detached bow shock wave) あるいは**わん曲衝撃波** (bow shock wave) という。ここでは、斜め衝撃波前後の状態量の関係を調べてみよう。それぞれの速度および角度は、図 10.12(d)の流れの関係に示すとおりである。

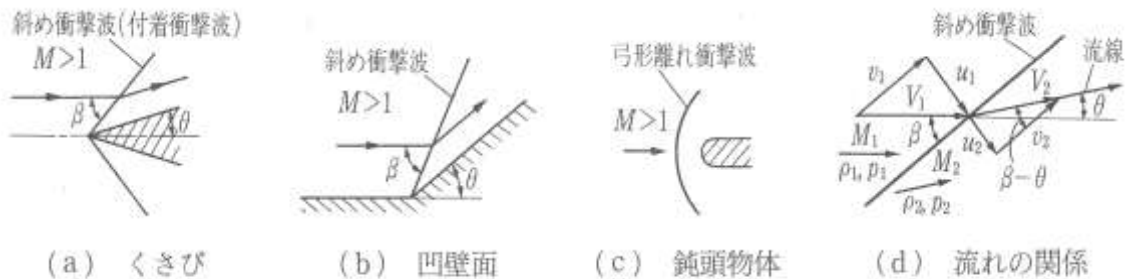


図 10.12 斜め衝撃波と衝撃波前後の流れの関係

$$\text{連続の式: } \rho_1 u_1 = \rho_2 u_2 \quad (10.92)$$

$$\text{波面に垂直な運動量の式: } p_1 + \rho_1 u_1^2 = p_2 + \rho_2 u_2^2 \quad (10.93)$$

$$\text{波面に平行な運動量の式: } \rho_1 u_1 v_1 = \rho_2 u_2 v_2 \quad (10.94)$$

式(10.92)を用いると

$$v_1 = v_2 \quad (10.95)$$

となり, 斜め衝撃波の波面に平行な方向には, 変化はないことがわかる。

$$\text{エネルギーの式は } \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{1}{2} V_1^2 = \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{1}{2} V_2^2 \quad (10.96)$$

であり, 速度線図より $V_1^2 = u_1^2 + v_1^2$, $V_2^2 = u_2^2 + v_2^2$ の関係があるから, これらを上式に代入すると

$$\text{エネルギーの式は } \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{1}{2} u_1^2 = \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{1}{2} u_2^2 \quad (10.97)$$

となる。これらの式より, 斜め衝撃波に垂直な流れの成分をとると, 垂直衝撃波の基礎式(10.77)~(10.79)をそのまま適用できる。図 10.12(d)より

$$u_1 = V_1 \sin \beta, \quad u_2 = V_2 \sin(\beta - \theta) \quad (10.98)$$

斜め衝撃波に垂直な成分の衝撃波の波面前後のマッハ数を, それぞれ M_{u1} , M_{u2} とすると, 上式より

$$u_1/a_1 = M_{u1} = M_1 \sin \beta, \quad u_2/a_2 = M_{u2} = M_2 \sin(\beta - \theta) \quad (10.99)$$

となる。この式の M_{u1} , M_{u2} を垂直衝撃波の基礎式における M_1 , M_2 と置き換え, 垂直衝撃波に関する式(10.84)~(10.87)に適用すると, 斜め衝撃波前後のマッハ数, 温度比, 圧力比, および密度比の関係は, それぞれ次のように衝撃波前のマッハ数 M_1 で表される。

$$M_2^2 \sin^2(\beta - \theta) = \frac{2 + (\kappa - 1) M_1^2 \sin^2 \beta}{2\kappa M_1^2 \sin^2 \beta - (\kappa - 1)} \quad (10.100)$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{\{2\kappa M_1^2 \sin^2 \beta - (\kappa - 1)\} \{(\kappa - 1) M_1^2 \sin^2 \beta + 2\}}{(\kappa + 1)^2 M_1^2 \sin^2 \beta} \quad (10.101)$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2\kappa M_1^2 \sin^2 \beta - (\kappa - 1)}{\kappa + 1} \quad (10.102)$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\kappa+1) M_1^2 \sin^2 \beta}{(\kappa-1) M_1^2 \sin^2 \beta + 2} \quad (10.103)$$

なお、ここで角度 β は**衝撃波角**(shock angle), θ は**偏角**(deflection angle)とよばれるもので、 β と θ との間には

$$\tan \theta = \frac{2 \cot \beta (M_1^2 \sin^2 \beta - 1)}{M_1^2 (\kappa + \cot^2 \beta) + 2} \quad (10.104)$$

の関係式が成立つ。この式は、衝撃波直前のマッハ数 M_1 をパラメータとする衝撃波角 β と偏角 θ との関係を示す重要な式である。

10.3.3 離脱衝撃波

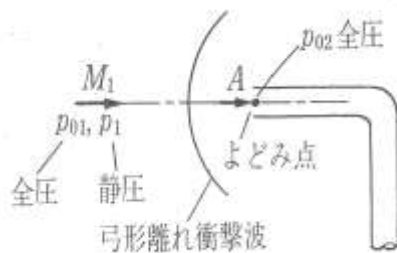


図 10.13 超音速噴流中におかれた全圧ピトー管

図 10.13 に示すように、超音速噴流中に置かれたピトー管によってマッハ数の測定をする場合、その先端には弓形離れ衝撃波が生じる。ピトー管の前面においては、衝撃波が垂直であると考えてよい。衝撃波前の超音速流は、この垂直衝撃波を通過して亜音速流となり、断熱で等エントロピー流れが成り立つとする。ピトー管の先端の点 A では、よどみ圧力 (全圧) p_{02} となり、衝撃波前方のマッハ数を M_1 , 全圧を p_{01} , 静圧を p_1 とすると、よどみ圧力 p_{02} , マッハ数 M_1 , および全圧 p_{01} との間には、次の式が成立する。

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \left\{ \frac{(\kappa+1)M_1^2}{(\kappa-1)M_1^2 + 2} \right\}^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \left\{ \frac{\kappa+1}{2\kappa M_1^2 - (\kappa-1)} \right\}^{\frac{1}{\kappa-1}} \quad (10.105)$$

この式より、 M_1 と p_{02} が既知であると、真のよどみ圧力 p_{01} が求められる。また、 $M > 1$ のときには、 $p_{02} < p_{01}$ となり、流れの全圧は、垂直衝撃波によって減

少することがわかる。なお、衝撃波前方のよどみタンクの状態がわからないときには、例えば、等エントロピー流れでない場合や、飛行機などで全圧 p_{02} を測定する場合には、一様流れの前方静圧 p_1 が既知であれば、次の式から、マッハ数 M_1 を求めることができる。式(10.105)と(10.48)より

$$\frac{p_{02}}{p_1} = \frac{p_{02}}{p_{01}} \frac{p_{01}}{p_1} = \left\{ \frac{(\kappa+1)M_1^2}{2} \right\}^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \left\{ \frac{\kappa+1}{2\kappa M_1^2 - (\kappa-1)} \right\}^{\frac{1}{\kappa-1}} \quad (10.106)$$

上式を、**レイリーのピトー管公式** (Reyleigh pitot-tube formula) いい、 p_1 と p_{02} を測定することによって、超音速流のマッハ数 M_1 を求めることができる。

10.4 圧縮波と膨張波

衝撃波の強さが小さい極限の場合としての、圧縮波と膨張波の簡単な性質について調べてみよう。

10.4.1 圧縮波

図 10.14(a)に示すように、一様な超音速流がゆるやかに曲がる凹壁面に沿って流れている場合を考える。

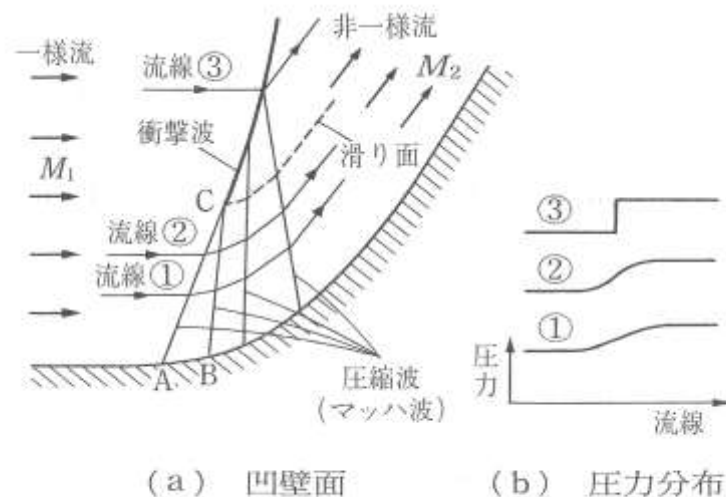


図 10.14 緩やかに曲がる凹壁面を過ぎる超音速流

図に示すように、凹壁面より無数の**マッハ波** (Mach wave) が生じるが、このマッハ波を**圧縮波** (compression wave) とよぶ。圧縮波は上方で集合して、交点をもつことになる。たとえば、図の点 A, B で発生した圧縮波は、点 C で集合する。点 C より上方では、このような圧縮波が次々に集合して**衝撃波**が形成される。図(b)に示すように、流線①, ②, ③上の圧力は、流線①, ②では連続的に増加しているが、流線③では不連続的に増加している。すなわち、圧縮波を通過した流れの圧力は、増加することになる。点 C と凹壁面との間の流れでは、エントロピーは変化しないが、**衝撃波**を通過する流れでは、エントロピーは増加する。したがって、点 C を通過する流線は、この点の前後でエントロピーが異なることになる。この面を**すべり面** (slip surface) といい、この面では速度差を生じる。

10.4.2 膨張波

図 10.15 に凸壁面を過ぎる超音速流の流れのようすを示す。角部の A 点より無数の弱い**膨張波** (expansion wave) が発生しており、流れは膨張波の発生している部分で少しずつ方向を変え、圧力や密度は、低下していく。このような流れを**プラントル・マイヤー流れ** (Prandtl-Meyer flow), 膨張波を**有心膨張波** (centered expansion) あるいは**プラントル・マイヤー膨張扇** (Prandtl-Meyer expansion fan) という。

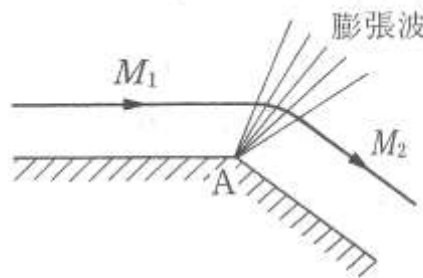


図 10.15 凸壁面を過ぎる
超音速流