

基礎と演習 流れの力学

第 9 章 次元解析と相似則

9.1 次元解析

9.1.1 ロード・レイリー法

9.1.2 バックinghamの π 定理の方法

9.2 相似則

第 9 章 演習問題 (完全解答付き)

第 9 章 次元解析と相似則

研究室での模型実験の結果が，実用上の設計に適用，応用され，現在，種々の流体機械の設計，ならびに航空機や新幹線などの形状設計に大いに役立っている。さらに，実験に次元解析や相似則を導入にすることによって，実験に要する時間を大幅に軽減できる利点があり，流体力学上の諸問題を解明するのに有用な方法としてよく利用されている。

9.1 次元解析

多くの物理現象には時間，速さ，長さ，および質量，圧力，力などの物理量が関係しており，一般に力学系においては，質量 M ，長さ L ，時間 T の三つの基本単位を用いて物理量を表わすことができる。

次元解析(dimensional analysis)は，物理的に意義をもつ等式における各項の単位の次元は，同じ次元でなければならないという，次元の同次性の原理を応用したものである。

たとえば，

$$A + B = C$$

の式において， A ， B ， C の各項の単位の次元は，次元の同次性により同じでなければならないというものである。したがって，次元解析は，流体の諸現象がどのような因子に影響を受けているかを知るのに有効な手段であり，問題とする物理量と諸因子の間の次元を等しくすることによって，現象の予測をする方法である。特に，複雑な現象の解明には有効な手段であるが，あくまでも現象を推測する方法であり，最終的には実験で確認，あるいは修正をする必要がある。次元解析には，おもに次の二つの方法がある。

9.1.1 ロード・レイリー法 (Lord Rayleigh's method)

主として，物理量が少ない場合に用いられ，流体の現象を関係する物理量の

積の形で表す方法である。

表 9.1 に主な物理量の記号，S I 単位および MLT の基本単位を示す。

表 9.1 物理量の記号，単位，次元

物理量	記号	SI単位	MLT 系
長さ	l	m	L
直径	d	m	L
面積	A	m^2	L^2
加速度	α	m/s^2	LT^{-2}
速度	V	m/s	LT^{-1}
質量	m	kg	M
密度	ρ	kg/m^3	ML^{-3}
力，抗力	F	$N, kg \cdot m/s^2$	MLT^{-2}
圧力	p	$Pa, N/m^2$	$ML^{-1}T^{-2}$
せん断応力	τ	Pa	$ML^{-1}T^{-2}$
粘度	μ	$Pa \cdot s$	$ML^{-1}T^{-1}$
動粘度	ν	m^2/s	L^2T^{-1}
流量	Q	m^3/s	L^3T^{-1}
体積弾性係数	K	Pa	$ML^{-1}T^{-2}$

9.1.2 バックインガムの π (パイ) 定理の方法

π 定理は，バックインガム (1915) によって考案された定理で，無次元量 π を変数とする無次元方程式より，物理現象を解明する方法である。

いま，ある物理現象において，時間，長さ，面積，圧力，速度などのような n 個の物理量 q_1, q_2, \dots, q_n の間に

$$f(q_1, q_2, \dots, q_n) = 0 \quad (9.1)$$

の関数関係がある場合，これらの物理量を構成する基本単位，すなわち，質量 M ，長さ L ，時間 T などの数が m 個の基本単位で表されるならば，このような現象は， $n-m$ 個の互いに独立な無次元量 $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{n-m}$ を変数とする

$$\phi(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{n-m}) = 0 \quad (9.2)$$

あるいは

$$\pi_1 = f(\pi_2, \pi_3, \dots, \pi_{n-m}) \quad (9.3)$$

の方程式で表すことができる。これらの式(9.2), (9.3)を **Buckingham の π 定理** (Buckingham π -theorem) という。

ここで,

$$\left. \begin{aligned} \pi_1 &= q_1^{\alpha_1} q_2^{\beta_1} \dots q_m^{\kappa_1} q_{m+1}, \\ \pi_2 &= q_1^{\alpha_2} q_2^{\beta_2} \dots q_m^{\kappa_2} q_{m+2}, \\ &\dots \dots \dots \\ \pi_{n-m} &= q_1^{\alpha_{n-m}} q_2^{\beta_{n-m}} \dots q_m^{\kappa_{n-m}} q_n \end{aligned} \right\} \quad (9.4)$$

である。

無次元量 $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{n-m}$ は, 次のようにして求めることができる。まず, n 個の物理量のうちの m 個 ($q_1 \sim q_m$) は, π の式のすべてに含まれるようにする。したがって, これらの m 個を繰返し変数という。次に, 残りの $(n-m)$ 個 ($q_{m+1} \sim q_n$) は, それぞれ一回だけ π の式の中に入れる。 $q_{m+1} \sim q_n$ のこれらの項のべき指数は, 0 以外の数が選ばれるが, 一般に 1 にとる。最終的に, 式(9.4)の左辺と右辺の基本単位 M, L, T などについての次元を等しくおき, べき指数 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-m}, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-m}$ を決定することによって, 無次元量 $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{n-m}$ を求めることができる。これらの無次元量で実験結果を整理することによって, 物理現象をある程度推測することができる。

9.2 相似則

流体力学における模型 (model) を用いた実験は, 実物 (prototype) の性能を推定したり, 設計への応用に重要な役割を果たす。たとえば, ポンプ, 水車, 自動車, 新幹線, 船, 航空機やダムなどにおいては, これらの性能を予測するのに実物を用いての実験には膨大な費用や労力, 時間を要し, また不可能な場合も多く, 実物を縮小した模型実験が有用となってくる。このような場合においては, 模型と実物との間には形状および流れに対する姿勢が幾何学的に相似であることが必要である。さらに, 模型と実物まわりの流れの速度などが運動学的に相似であることと, これらの物体に働く力などが力学的に相似であるこ

とが必要である。このように、模型と実物まわりの流れの現象が相似になることを**相似則** (law of similarity) という。相似則が成立するためには、模型と実物の間で**幾何学的相似** (geometric similarity), **運動学的相似** (kinematic similarity), **力学的相似** (dynamic similarity) が成立することが必要である。幾何学的相似においては、模型と実物の対応する長さの比が一定でなければならない。運動学的相似においては、模型と実物の対応する点における速度の比と加速度の比が等しく、これらのベクトルの向きが同じでなければならない。また、力学的相似においては、模型と実物の対応する点に作用する力の比がすべて等しくなければならない。一般的に、実物と模型との間で幾何学的および運動学的に相似であるならば、模型と実物との間には力学的相似が成り立つ。

一般に、流体に作用する力には、慣性力、圧力による力 (全圧力), 粘性による力、重力加速度による力、表面張力による力、および弾性力などがある。いま、代表長さを l , 速度を V , 密度を ρ とすると、模型と実物に作用する力は、次のように表される。

$$\text{慣性力} : F_i = (\text{質量}) \times (\text{加速度}) = (\rho l^3) \left\{ l / (l/V)^2 \right\} = (\rho l^3) (V^2 / l) = \rho V^2 l^2$$

$$\text{圧力による力 (全圧力)} : F_p = (\text{圧力}) \times (\text{面積}) = pA = \rho l^2$$

$$\text{粘性による力} : F_\mu = (\text{せん断応力}) \times (\text{せん断面積})$$

$$= \tau l^2 = \mu (du/dy) A = \mu (V/l) l^2 = \mu V l$$

$$\text{重力の加速度による力} : F_g = (\text{質量}) \times (\text{重力による加速度}) = mg = \rho l^3 g$$

$$\text{表面張力による力} : F_\sigma = (\text{表面張力}) \times (\text{長さ}) = \sigma l$$

$$\text{弾性力} : F_K = (\text{体積弾性係数}) \times (\text{面積}) = KA = K l^2$$

これらの力の比が、模型実験と実物において等しければ、力学的相似が成り立つことになる。よく使われている代表的な無次元数を次に示す。

(1) レイノルズ数 (Reynolds number) R_e

$$R_e = \frac{\text{慣性力}}{\text{粘性力}} = \frac{F_i}{F_\mu} = \frac{\rho V^2 l^2}{\mu V l} = \frac{\rho V l}{\mu} = \frac{V l}{\nu} \quad (9.5)$$

この式は、レイノルズ数の相似則としてよく知られており、模型と実物との流れが力学的に相似であるためには、それぞれのレイノルズ数を等しくしなければ

ばならない。よく用いられる重要な無次元数である。

(2) オイラー数 (Euler number) E

$$E = \frac{\text{慣性力}}{\text{全圧力}} = \frac{F_i}{F_p} = \frac{\rho V^2 l^2}{\rho l^2} = \frac{\rho V^2}{p} \quad (9.6)$$

オイラー数は、次の圧力係数の形でよく用いられる。

(3) 圧力係数 (pressure coefficient) C_p

$$C_p = \frac{\text{全圧力}}{\text{慣性力}} = \frac{F_p}{F_i} = \frac{\rho l^2}{\rho V^2 l^2} = \frac{\Delta p}{\rho V^2 / 2} \quad (9.7)$$

流れの中に置かれた物体に作用する形状抵抗や管路内流れの抵抗を調べるときによく用いられる重要な無次元数である。

(4) フルード数 (Froude number) F_r

$$F_r = \left(\frac{\text{慣性力}}{\text{重力の加速度による力}} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{F_i}{F_g} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{\rho V^2 l^2}{\rho l^3 g} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{V}{\sqrt{gl}} \right) \quad (9.8)$$

船の造波抵抗や橋脚に作用する力などに用いられる。

(5) マッハ数 (Mach number) M

$$M = \left(\frac{\text{慣性力}}{\text{弾性力}} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{F_i}{F_k} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{\rho V^2 l^2}{K l^2} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{V}{\sqrt{K/\rho}} = \frac{V}{a} \quad (9.9)$$

ここで、 $a = \sqrt{K/\rho}$ は音速*であり、マッハ数は圧縮性を伴う高速流れの場合に用いられる重要な無次元数である。

(6) ウェーバ数 (Weber number) W_e

$$W_e = \left(\frac{\text{慣性力}}{\text{表面張力による力}} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{F_i}{F_\sigma} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{\rho V^2 l^2}{\sigma l} \right)^{\frac{1}{2}} = V \sqrt{\frac{\rho l}{\sigma}} \quad (9.10)$$

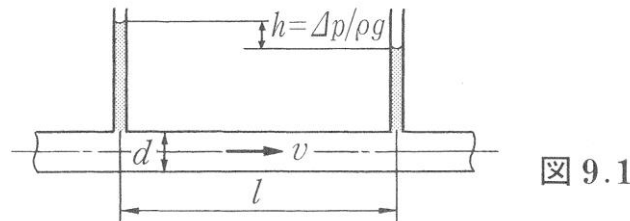
ウェーバ数は、表面張力の影響の大きい液滴や気泡の生成などの問題に用いられる。

.....

* 第10章 10.1.3 を参照

第9章 演習問題

【問題 9.1】 図 9.1 に示すように、十分に長い直円管内を液体が流れるときの管摩擦によって生じる圧力損失 Δp の次元解析をロード・レイリー法を用いて試みてみよう。



【解】 摩擦による圧力損失 Δp は、管内径 d 、管長さ l 、管壁の突起の高さ ε 、平均流速 v 、密度 ρ 、粘度 μ の物理量に左右されると考えられるから、圧力損失 Δp は、これらの関数とみなされる。したがって

$$\Delta p = f(d, l, \varepsilon, v, \rho, \mu) \quad (1)$$

この関数は、次のようなすべての物理量の積の形で表されるものと仮定する。

$$\Delta p = k d^\alpha l^\beta \varepsilon^\gamma v^\delta \rho^\eta \mu^\xi \quad (2)$$

ここで、 k は無次元係数とする。上式が成立するには、次元の同次性より左右両辺の次元が一致しなければならない。表 9.1 に示した MLT 系の基本単位を用いて、上式の次元を比較すると

$$\begin{aligned} ML^{-1}T^{-2} &= L^\alpha L^\beta L^\gamma (LT^{-1})^\delta (ML^{-3})^\eta (ML^{-1}T^{-1})^\xi \\ &= M^{\eta+\xi} L^{\alpha+\beta+\gamma+\delta-3\eta-\xi} T^{-\delta-\xi} \end{aligned}$$

次元の同次性より、両辺の指数を比較すると

$$\begin{aligned} M : 1 &= \eta + \xi \\ L : -1 &= \alpha + \beta + \gamma + \delta - 3\eta - \xi \\ T : -2 &= -\delta - \xi \\ \therefore \eta &= 1 - \xi, \quad \delta = 2 - \xi, \quad \alpha = -\beta - \gamma - \xi \end{aligned}$$

これらを式(2)に代入すると

$$\begin{aligned}
 \Delta p &= k d^{-\beta-\gamma-\xi} l^{\beta} \varepsilon^{\gamma} \nu^{2-\xi} \rho^{1-\mu\xi} \\
 &= k \left(\frac{l}{d}\right)^{\beta} \left(\frac{\varepsilon}{d}\right)^{\gamma} \left(\frac{\mu}{\rho \nu d}\right)^{\xi} \rho \nu^2 \\
 &= 2k \left(\frac{\varepsilon}{d}\right)^{\gamma} \left(\frac{1}{R_e}\right)^{\xi} \left(\frac{l}{d}\right)^{\beta} \frac{\rho \nu^2}{2} \\
 &= f\left(R_e, \frac{\varepsilon}{d}\right) \left(\frac{l}{d}\right)^{\beta} \frac{\rho \nu^2}{2}
 \end{aligned}$$

十分に長い管では、 $\Delta p \propto l$ となることが確認されているから、指数 $\beta=1$ とすると

$$\Delta p = f\left(R_e, \frac{\varepsilon}{d}\right) \frac{l}{d} \frac{\rho \nu^2}{2} \quad (3)$$

圧力損失ヘッドを h とすると

$$\therefore h = \frac{\Delta p}{\rho g} = f\left(R_e, \frac{\varepsilon}{d}\right) \frac{l}{d} \frac{\nu^2}{2g} \quad (4)$$

式(3), (4)は、第5章で述べたように、管摩擦係数を λ とすると、ダルシー・ワイスバッハ(Darcy-Weisbach)の式

$$\Delta p = \lambda \frac{l}{d} \frac{\rho \nu^2}{2} \quad (9.11)$$

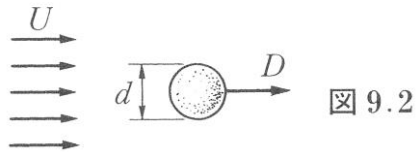
$$\text{あるいは } h = \lambda \frac{l}{d} \frac{\nu^2}{2g} \quad (9.12)$$

と一致する。ただし

$$\lambda = f\left(R_e, \frac{\varepsilon}{d}\right) \quad (5)$$

であり、 λ はレイノルズ数 R_e と管壁の粗度 ε/d の関数であることがわかる。

【問題 9.2】 図 9.2 に示すように、一様な流れの中におかれた表面が滑らかな球の受ける抗力 D をロード・レイリー法の次元解析によって導け。



【解】 球の受ける抗力 D は、流速 U 、球の直径 d 、および流体の密度 ρ 、粘度 μ の物理量の影響を受けると考えられるので

$$D = f(U, d, \rho, \mu)$$

無次元係数を k とすると

$$D = k U^\alpha d^\beta \rho^\gamma \mu^\delta \quad (1)$$

両辺の次元を比較すると

$$\begin{aligned} MLT^{-2} &= (LT^{-1})^\alpha (L)^\beta (ML^{-3})^\gamma (ML^{-1}T^{-1})^\delta \\ &= M^{\gamma+\delta} L^{\alpha+\beta-3\gamma-\delta} T^{-\alpha-\delta} \end{aligned}$$

次元の同次性より、両辺の指数を比較すると

$$\begin{aligned} M: 1 &= \gamma + \delta \\ L: 1 &= \alpha + \beta - 3\gamma - \delta \\ T: -2 &= -\alpha - \delta \\ \therefore \alpha &= 2 - \delta, \quad \beta = 2 - \delta, \quad \gamma = 1 - \delta \end{aligned}$$

これらを式(1)に代入すると

$$\begin{aligned} D &= k U^{2-\delta} d^{2-\delta} \rho^{1-\delta} \mu^\delta \\ &= k \rho U^2 d^2 \left(\frac{\mu}{\rho U d} \right)^\delta \\ &= k d^2 \left(\frac{1}{Re} \right)^\delta \rho U^2 \\ &= f(Re) d^2 \rho U^2 \quad (2) \end{aligned}$$

となる。いま、 $f(R_e) = C_D(\pi/8)$ とおくと、式(2)は

$$\begin{aligned} D &= C_D \left(\frac{\pi d^2}{4} \right) \frac{\rho U^2}{2} \\ &= C_D A \frac{\rho U^2}{2} \end{aligned} \quad (9.13)$$

となる。ここで、 C_D は抗力係数 $\{C_D = f(R_e)(8/\pi)\}$ 、 A は球の基準面積である。したがって、抗力係数 C_D は R_e の関数であることが推測できる。

【問題 9.3】 レイノルズ数 R_e をロード・レイリー法の次元解析によって導け。

【解】 レイノルズ数 R_e は流速 v 、代表長さ l 、流体の密度 ρ 、粘度 μ の物理量の影響を受けると考えられるので、無次元係数を k とすると

$$R_e = k v^\alpha l^\beta \rho^\gamma \mu^\delta \quad (1)$$

両辺の次元を比較すると、 R_e は無次元量であるので

$$M^0 L^0 T^0 = (L T^{-1})^\alpha L^\beta (M L^{-3})^\gamma (M L^{-1} T^{-1})^\delta$$

次元の同次性より、両辺の指数を比較すると

$$\begin{aligned} M: 0 &= \gamma + \delta \\ L: 0 &= \alpha + \beta - 3\gamma - \delta \\ T: 0 &= -\alpha - \delta \\ \therefore \alpha &= -\delta, \quad \beta = -\delta, \quad \gamma = -\delta \end{aligned}$$

これらを式(1)に代入すると

$$R_e = k v^{-\delta} l^{-\delta} \rho^{-\delta} \mu^\delta = k \left(\frac{\rho v l}{\mu} \right)^{-\delta} \quad (2)$$

k と δ の値は、実験等によって求められるが、いま、 $k=1$ 、 $\delta=-1$ とすると

$$R_e = \frac{\rho v l}{\mu} = \frac{v l}{\nu} \quad (9.14)$$

となる。

【問題 9.4】完全流体が図 9.3 に示すような管内に設けられたノズルを流れるときの流量 Q を、ロード・レイリー法の次元解析によって導け。

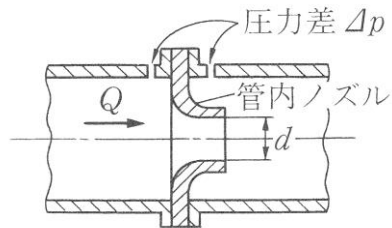


図 9.3

【解】流量 Q は、ノズル前後の圧力差 Δp 、ノズル口径 d および流体の密度 ρ の影響を受けると考えられるので、無次元係数を k とすると

$$Q = k(\Delta p)^\alpha d^\beta \rho^\gamma \quad (1)$$

両辺の次元を比較すると

$$M^0 L^3 T^{-1} = (ML^{-1}T^{-2})^\alpha L^\beta (ML^{-3})^\gamma$$

両辺の指数を比較すると

$$\begin{aligned} M: 0 &= \alpha + \gamma \\ L: 3 &= -\alpha + \beta - 3\gamma \\ T: -1 &= -2\alpha \\ \therefore \alpha &= 1/2, \quad \beta = 2, \quad \gamma = -1/2 \end{aligned}$$

これらを式(1)に代入すると

$$Q = k(\Delta p)^{1/2} d^2 \rho^{-1/2} = kd^2 \sqrt{\Delta p / \rho} \quad (2)$$

k の値は、実験等によって求められるが、いま、 $k = \sqrt{2}(\pi/4)$ とおくと、上式は

$$Q = \sqrt{2} \left(\frac{\pi}{4} \right) d^2 \sqrt{\frac{\Delta p}{\rho}} = \frac{\pi d^2}{4} \sqrt{\frac{2}{\rho} \Delta p} = \frac{\pi d^2}{4} \sqrt{2gh} \quad (9.15)$$

ここに、 $h = \Delta p / \rho g$ はノズル前後の圧力ヘッド差である。

【問題 9.5】乾き空気中の音速 a をロード・レイリー法の次元解析によって導け。

【解】音速 a は、空気の密度 ρ と体積弾性係数 K の関数であるから、無次元係

数を k とすると

$$a = k \rho^\alpha K^\beta \quad (1)$$

両辺の次元を比較すると

$$M^0 L^1 T^{-1} = (ML^{-3})^\alpha (ML^{-1}T^{-2})^\beta$$

両辺の指数を比較すると

$$\begin{aligned} M: 0 &= \alpha + \beta \\ L: 1 &= -3\alpha - \beta \\ T: -1 &= -2\beta \\ \therefore \alpha &= -1/2, \quad \beta = 1/2 \end{aligned}$$

これらを式(1)に代入すると

$$a = k \rho^{-1/2} K^{1/2} = k \sqrt{\frac{K}{\rho}} \quad (2)$$

k の値は、実験等によって求められるが、いま、 $k=1$ とおくと、上式は

$$a = \sqrt{\frac{K}{\rho}} \quad (9.16)$$

となる。

【問題 9.6】 一様な流れの中におかれた球の受ける抗力 D を、バッキンガムの π 定理を用いた次元解析法によって導け。

【解】 球の受ける抗力 D は、流速 U 、球の直径 d 、および流体の密度 ρ 、粘度 μ の 5 個の物理量の影響を受けると考えられるから、式 (9.1) を適用して、5 個の物理量の間には次式で示す関係があるとする。

$$f(\rho, U, d, D, \mu) = 0 \quad (1)$$

また、物理量は $n=5$ 、基本量 (M, L, T) は $m=3$ であるので、 $n-m=2$ となり、 π パラメーターを π_1, π_2 として式 (9.2) を適用すると

$$\phi(\pi_1, \pi_2) = 0 \quad (2)$$

で表される。ここで、式 (9.4) の右辺の q_1, q_2, q_3 を ρ, U, d とすると、 π_1, π_2 は

$$\pi_1 = \rho^{\alpha_1} U^{\beta_1} d^{\gamma_1} D \quad (3)$$

$$\pi_2 = \rho^{\alpha_2} U^{\beta_2} d^{\gamma_2} \mu \quad (4)$$

となる。左辺の π は無次元であるので、 π_1 の両辺の次元を比較すると

$$\begin{aligned} M^0 L^0 T^0 &= (ML^{-3})^{\alpha_1} (LT^{-1})^{\beta_1} (L)^{\gamma_1} (M L^{-1} T^{-1}) \\ &= M^{\alpha_1+1} L^{-3\alpha_1+\beta_1+\gamma_1+1} T^{-\beta_1-2} \end{aligned}$$

次元の同次性より、両辺の指数を比較すると

$$\begin{aligned} M: 0 &= \alpha_1 + 1 \\ L: 0 &= -3\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 + 1 \\ T: 0 &= -\beta_1 - 2 \\ \therefore \alpha_1 &= -1, \beta_1 = -2, \gamma_1 = -2 \end{aligned}$$

これらを式(3)に代入すると

$$\pi_1 = \rho^{-1} U^{-2} d^{-2} D = \frac{D}{\rho U^2 d^2} \quad (5)$$

同じように式(4)の π_2 において、 $\alpha_2 = -1$, $\beta_2 = -1$, $\gamma_2 = -1$ となるから

$$\pi_2 = \frac{\mu}{\rho U D} = \frac{\nu}{U D} = \frac{1}{R_e} \quad (6)$$

式(9.2)のバッキンガムの π 定理より

$$\phi(\pi_1, \pi_2) = \phi\left(\frac{D}{\rho U^2 d^2}, \frac{1}{R_e}\right) = 0 \quad (7)$$

いま、 $\pi_1 = \phi_1(1/\pi_2)$ とおくと、 $D/(\rho U^2 d^2) = \phi_1(R_e)$ より、式(7)は

$$D = \rho U^2 d^2 \phi_1(R_e) \quad (8)$$

となる。抗力係数 C_D はレイノルズ数 R_e の関数であることが、実験でわかっている。いま、 $C_D = (8/\pi)\phi_1(R_e)$ とおくと、 $\phi_1(R_e) = C_D \pi/8$ より式(8)は

$$D = C_D \frac{\pi d^2}{4} \frac{\rho U^2}{2} = C_D A \frac{\rho U^2}{2} \quad (9.17)$$

となる。ここで、 A は球の投影基準面積であり、第 7 章における抗力を求める式と一致する。

なお、式(9.3)の π 定理を用いると

$$\pi_1 = \frac{D}{\rho U^2 d^2} = f_1(\pi_2) = f_1\left(\frac{1}{R_e}\right) = f_2(R_e)$$

$$\therefore D = f_2(R_e) \rho U^2 d^2 \quad (9)$$

いま, $f_2(R_e) = C_D / (8/\pi)$ とおくと, 式(9)は

$$D = C_D \frac{\pi d^2}{4} \frac{\rho U^2}{2} = C_D A \frac{\rho U^2}{2} \quad (9.18)$$

となり, 式(9.17)と同じ結果が得られる。

【問題 9.7】 一様な流れの中におかれた球の受ける抗力 D を, (問題 9.6) においては式 (9.4) の右辺の物理量 q_1, q_2, q_3 を ρ, U, d として用い, これらを繰返し変数として求めた。ここでは球の抗力 D を, μ, U, d を繰返し変数として, バッキンガムの π 定理で求めよ。

【解】 (問題 9.6) と同様の方法で π_1, π_2 を求める。

$$\pi_1 = \mu^{\alpha_1} U^{\beta_1} d^{\gamma_1} D, \quad \pi_2 = \mu^{\alpha_2} U^{\beta_2} d^{\gamma_2} \rho \quad (1)$$

次元の同次性より, 指数を求めると, π_1, π_2 は

$$\pi_1 = \frac{D}{\mu U d}, \quad \pi_2 = \frac{U d \rho}{\mu} = \frac{U D}{\nu} = R_e \quad (2)$$

となる。式(9.3)の π 定理より

$$\frac{D}{\mu U d} = f_1(\pi_2) = f_2(R_e) \quad \therefore D = f_2(R_e) \mu U d \quad (3)$$

となる。いま, $f_2(R_e) = 3\pi(1 + 3R_e/16)$ とすると

$$D = 3\pi \mu U d \left(1 + \frac{3}{16} R_e\right) = 3\pi \mu U d \left(1 + \frac{3}{16} \frac{U d}{\nu}\right) \quad (9.19)$$

となる。上式は, $Re < 2$ で適用されるオゼーン (Oseen) の式と一致する。

【問題 9.8】 十分に長い直円管内を液体が流れるときの管摩擦によって生じる圧力損失 Δp の次元解析をバッキンガムの π 定理を用いて求めよ。

【解】 管摩擦による圧力損失 Δp は、管内径 d 、管長さ l 、管壁の突起の高さ ε 、平均流速 v 、密度 ρ 、粘度 μ の物理量に左右されると考えられる。いま圧力損失 Δp は、圧力こう配 $\Delta p/l$ に依存すると考えると、物理量は $n=6$ 、基本量は $m=3$ 、したがって $n-m=3$ となる。 ρ, v, d を繰返し変数とすると、式 (9.1)、(9.3) より

$$f(\rho, v, d, \Delta p/l, \varepsilon, \mu) = 0 \quad (1)$$

$$\pi_1 = f_1(\pi_2, \pi_3) \quad (2)$$

π_1, π_2, π_3 は

$$\pi_1 = \rho^{\alpha_1} v^{\beta_1} d^{\gamma_1} (\Delta p/l) \quad (3)$$

$$\pi_2 = \rho^{\alpha_2} v^{\beta_2} d^{\gamma_2} \varepsilon \quad (4)$$

$$\pi_3 = \rho^{\alpha_3} v^{\beta_3} d^{\gamma_3} \mu \quad (5)$$

となる。左辺の π は無次元であるので、 π_1 の両辺の次元を比較すると

$$\begin{aligned} M^0 L^0 T^0 &= (ML^{-3})^{\alpha_1} (LT^{-1})^{\beta_1} (L)^{\gamma_1} (ML^{-2}T^{-2}) \\ &= M^{\alpha_1+1} L^{-3\alpha_1+\beta_1+\gamma_1-2} T^{-\beta_1-2} \end{aligned}$$

次元の同次性より、両辺の指数を比較すると

$$\begin{aligned} M: 0 &= \alpha_1 + 1 \\ L: 0 &= -3\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 - 2 \\ T: 0 &= -\beta_1 - 2 \\ \therefore \alpha_1 &= -1, \quad \beta_1 = -2, \quad \gamma_1 = 1 \end{aligned}$$

これらを式(3)に代入すると

$$\pi_1 = \rho^{-1} v^{-2} d (\Delta p/l) = \frac{\Delta p}{l} \frac{d}{\rho v^2} \quad (6)$$

となる。 π_2, π_3 についても同様にして、それぞれの指数を求めると

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= 0, \quad \beta_2 = 0, \quad \gamma_2 = -1 \\ \therefore \pi_2 &= \rho^0 v^0 d^{-1} \varepsilon = \frac{\varepsilon}{d} \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \alpha_3 &= -1, \quad \beta_3 = -1, \quad \gamma_3 = -1 \\ \therefore \pi_3 &= \rho^{-1} v^{-1} d^{-1} \mu = \frac{\mu}{\rho v d} = \frac{v}{v d} = \frac{1}{R_e} \end{aligned} \quad (8)$$

となる。したがって、式(2)より

$$\pi_1 = \frac{\Delta p}{l} \frac{d}{\rho v^2} = f_1(\pi_2, \pi_3) = f_1\left(\frac{\varepsilon}{d}, \frac{1}{R_e}\right) \quad (9)$$

実験によると管摩擦係数 λ は、 $f_1 = (\varepsilon/d, 1/R_e)$ の関数であることがわかって
いるので、いま、 $f_1 = \lambda/2$ とおくと

$$\Delta p = \lambda \frac{l}{d} \frac{\rho v^2}{2} \quad (9.20)$$

となる。なお、圧力損失ヘッドを h とすると

$$h = \frac{\Delta p}{\rho g} = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g} \quad (9.21)$$

となる。

【問題 9.9】 バッキンガムの π 定理を用いた次元解析によって、管内ノズルからの流量 Q を求めよ。

【解】 流量 Q は、ノズル前後の圧力差 Δp 、管の内径 D 、ノズルの口径 d 、粘度 μ 、密度 ρ の物理量に左右されると考えられる。したがって、物理量は $n=6$ 、基本量は $m=3$ であるから $n-m=3$ となる。 ρ 、 Q 、 d を繰返し変数とすると式 (9.1)、(9.2) より

$$f(\rho, Q, d, \Delta p, D, \mu) = 0 \quad (1)$$

$$\phi(\pi_1, \pi_2, \pi_3) = 0 \quad (2)$$

π_1 、 π_2 、 π_3 は

$$\pi_1 = \rho^{\alpha_1} Q^{\beta_1} d^{\gamma_1} \Delta p \quad (3)$$

$$\pi_2 = \rho^{\alpha_2} Q^{\beta_2} d^{\gamma_2} D \quad (4)$$

$$\pi_3 = \rho^{\alpha_3} Q^{\beta_3} d^{\gamma_3} \mu \quad (5)$$

となる。左辺の π は無次元であるので、 π_1 の両辺の次元を比較すると

$$\begin{aligned} M^0 L^0 T^0 &= (ML^{-3})^{\alpha_1} (L^3 T^{-1})^{\beta_1} (L)^{\gamma_1} (ML^{-1} T^{-2}) \\ &= M^{\alpha_1+1} L^{-3\alpha_1+3\beta_1+\gamma_1-1} T^{-\beta_1-2} \end{aligned}$$

次元の同次性より、両辺の指数を比較すると

$$\begin{aligned}
M:0 &= \alpha_1 + 1 \\
L:0 &= -3\alpha_1 + 3\beta_1 + \gamma_1 - 1 \\
T:0 &= -\beta_1 - 2 \\
\therefore \alpha_1 &= -1, \beta_1 = -2, \gamma_1 = 4
\end{aligned}$$

これらを式(3)に代入すると

$$\pi_1 = \rho^{-1} Q^{-2} d^4 \Delta p = \frac{d^4 \Delta p}{\rho Q^2} = \left(\frac{d^2}{Q} \frac{\Delta p^{1/2}}{\rho^{1/2}} \right)^2 \quad (6)$$

となる。 π_2 , π_3 についても同様にして、それぞれの指数を求めると

$$\alpha_2 = 0, \beta_2 = 0, \gamma_2 = -1$$

$$\therefore \pi_2 = \rho^0 Q^0 d^{-1} D = \frac{D}{d} \quad (7)$$

$$\alpha_3 = -1, \beta_3 = -1, \gamma_3 = 1$$

$$\therefore \pi_3 = \rho^{-1} Q^{-1} d \mu = \frac{\mu d}{\rho Q} = \frac{d \mu / \rho}{\pi d^2 V / 4} = \frac{\mu / \rho}{V d \pi / 4} = \frac{1}{R_e} \frac{4}{\pi} \quad (8)$$

となる。したがって、式(2)より

$$\phi(\pi_1, \pi_2, \pi_3) = \phi \left\{ \left(\frac{d^2}{Q} \frac{\Delta p^{1/2}}{\rho^{1/2}} \right)^2, \frac{D}{d}, \frac{1}{R_e} \frac{4}{\pi} \right\} = 0 \quad (9)$$

となる。ここで、求める Q は式(6)に含まれているので、式(9.3)の定理を適用して整理すると、次の関係式(10)が得られる。

$$\begin{aligned}
\pi_1 &= \left\{ \frac{d^2}{Q} \sqrt{\frac{\Delta p}{\rho}} \right\}^2 = f_1 \left(\frac{D}{d}, \frac{1}{R_e} \frac{4}{\pi} \right) \\
\frac{d^2}{Q} \sqrt{\frac{\Delta p}{\rho}} &= f_2 \left(\frac{D}{d}, \frac{1}{R_e} \frac{4}{\pi} \right) \\
\frac{Q}{d^2} \sqrt{\frac{\rho}{\Delta p}} &= \frac{\pi}{4} \sqrt{2} f_3 \left(\frac{D}{d}, R_e \right) \quad (10)
\end{aligned}$$

これより、 Q は

$$Q = f_3 \left(\frac{D}{d}, R_e \right) \frac{\pi d^2}{4} \sqrt{\frac{2 \Delta p}{\rho}}$$

$$= \alpha \frac{\pi d^2}{4} \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}} \quad (9.22)$$

ここで、 $\alpha = f_3(D/d, R_e)$ は流量係数で実験により求められる。

【問題 9.10】 長さ $l_1 = 2 \text{ cm}$ の昆虫が、動粘度 $\nu_1 = 14 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ の空気中を速度 $V_1 = 5 \text{ m/s}$ で飛んでいる。空気と昆虫との相対運動を調べるのに、長さ l_2 が昆虫の長さ l_1 の 5 倍の模型を用いて、動粘度 $\nu_2 = 110 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ のオリーブ油の流れの中で模型実験をする場合、オリーブ油の速度 V_2 をいくりにしたらよいか。

【解】 実物と模型との流れが力学的に相似であるためには式(9.5)で示したように、それぞれのレイノルズ数を等しくしなければならない。したがって

$$\frac{V_1 \times l_1}{\nu_1} (\text{実物}) = \frac{V_2 \times l_2}{\nu_2} (\text{模型}) \quad (1)$$

となる必要がある。昆虫（実物）が空気中を飛ぶときのレイノルズ数 R_{e1} は

$$R_{e1} = \frac{V_1 \times l_1}{\nu_1} = \frac{5 \times 0.02}{14 \times 10^{-6}} = 7142 \quad (2)$$

となるので、模型のレイノルズ数 R_{e2} は

$$R_{e2} = \frac{V_2 \times l_2}{\nu_2} = 7142 \quad (3)$$

この式(3)に $\nu_2 = 110 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$, $l_2 = 5 \times 0.02 \text{ m}$ を代入すると

$$V_2 = \frac{7142 \times \nu_2}{l_2} = \frac{7142 \times 110 \times 10^{-6}}{5 \times 0.02} = 7.86 \text{ m/s}$$

となる。すなわち、模型を 7.86 m/s のオリーブ油の流れの中に置いたときの模型まわりの流れは、昆虫が実際に空気中を飛んでいるときの昆虫のまわりの流れと一致する。

【問題 9.11】 温度 20°C 、圧力 765 mmHg の空気が、直径 $D_1 = 1000 \text{ mm}$ の円管内を平均速度 $V_1 = 2 \text{ m/s}$ で流れている。この円管内の流れの状態を調べるために内径 $D_2 = 100 \text{ mm}$ のガラス円管の模型を用い、空気と同じ温度の水を流して実験し

ようとしている。ガラス管内の水の平均速度 V_2 をいくらししたらよいか。

【解】 流れが力学的に相似であるためには、式(9.5)の代表長さ l に管内径 D を用いると

$$\frac{V_1 \times D_1}{\nu_1} (\text{実物}) = \frac{V_2 \times D_2}{\nu_2} (\text{模型}) \quad (1)$$

でなければならない。温度 20°C の空気および水の動粘度は、第 1 章の表 1.5 と 1.4 より、それぞれ $\nu_1 = 15.15 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ 、 $\nu_2 = 1.0038 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ であるから、模型実験における速度 V_2 は、式(1)より

$$V_2 = V_1 \frac{D_1}{D_2} \frac{\nu_2}{\nu_1} = 2 \times \frac{1}{0.1} \times \frac{1.0038 \times 10^{-6}}{15.15 \times 10^{-6}} = 1.325 \text{ m/s} = 1325 \text{ cm/s}$$

となる。

【問題 9.12】 全長 $l_1 = 150 \text{ m}$ のタンカーが、温度 10°C の海上を $V_1 = 12 \text{ m/s}$ の速度で航行している。いま、このタンカーの海水から受ける全抵抗 D_1 を求めるために、水道水を入れた水槽中で $1/25$ の模型船を用いて試験をしている。実船のタンカーとフルード数 F_r を等しくする水槽試験で得た全抵抗の値が $D_2 = 80 \text{ N}$ であった。模型船の摩擦抵抗 D_{f2} および造波抵抗 D_{w2} 、実船の造波抵抗 D_{w1} と摩擦抵抗 D_{f1} および全抵抗 D_1 を推定せよ。ただし、実船のタンカーの濡れ面積を $A_1 = 4000 \text{ m}^2$ 、海水の動粘度を $\nu_1 = 1.188 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ 、海水の密度を $\rho_1 = 1025 \text{ kg/m}^3$ 、水道水の動粘度を $\nu_2 = 1.310 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ とする。

【解】 航行しているタンカーの全抵抗は、主に表面摩擦による摩擦抵抗 D_f が大きな割合を占めるが、この他に船首や船尾からの波の発生にもとづく造波抵抗 D_w および境界層のはく離による造渦抵抗 D_v とがあると考えられる。簡単のために造渦抵抗 D_v を造波抵抗 D_w のなかに含めると、船体の受ける全抵抗 D は、摩擦抵抗 D_f と造波抵抗 D_w の 2 つに大別できる。すなわち、全抵抗 D は

$$D = D_f + D_w = C_D \frac{\rho}{2} V^2 A = (C_f + C_w) \frac{\rho}{2} V^2 A \quad (9.23)$$

となる。ここで、 C_f を**摩擦係数(coefficient of friction)**、 C_w を**造波抵抗係数**

(coefficient of wave making resistance)という。 C_f は R_e の関数、 C_w は F_r の関数とみなせるので、実船と模型船との R_e と F_r を同時に満足させることが理想であるが、現実的に不可能である。なぜならば、粘性による摩擦抵抗を考慮すれば R_e を同一にして試験をしなければならぬ。このとき、水槽における模型試験を実船と同一の流体の動粘度をもつ海水で行うとすると、 R_e を同一にするためには

$$V_1 l_1 (\text{実船}) = V_2 l_2 (\text{模型}) \quad (1)$$

であるから、模型試験における速度 V_2 は

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{l_1}{l_2} = 25 \quad (2)$$

$$\therefore V_2 = 25V_1 = 25 \times 12 = 300 \text{ m/s}$$

となる。模型試験において、このような高速度での実験は不可能である。なお、模型試験における流体を動粘度の小さい他の流体に置き換えて R_e を同一にすることも考えられるが、実際に R_e を同一にするためには水よりも 10^{-2} から 10^{-3} 程度のかかなり小さな動粘度の流体を使用しなければならず、このような流体を見出すのは不可能である。一般的には、摩擦抵抗は同じ長さで濡れ面積をもつ平板が船と同じ速さで運動するときの抵抗に等しいと考えて分離する。したがって、船舶の模型試験では、まず、 F_r を実船と等しくなるようにして模型船の抵抗 D を測定し、この測定された抵抗 D から模型船の表面摩擦の抵抗 D_f を計算した値を式(9.23)に代入して、模型船の造波抵抗 D_w を求める。これらの値を使用して、実船の造波抵抗や全抵抗を計算する。

まず、 F_r を等しくする模型船の速度 V_2 は、式(9.8)を用いると

$$F_r = \frac{V_1}{\sqrt{g l_1}} = \frac{V_2}{\sqrt{g l_2}} \quad (3)$$

$$\text{であるから } V_2 = V_1 \sqrt{\frac{l_2}{l_1}} = 12 \times \sqrt{\frac{1}{25}} = 2.4 \text{ m/s} \quad (4)$$

となる。次に、模型船の R_{e2} は、代表長さ $l_2 = 150/25 = 6 \text{ m}$ であるから

$$R_{e2} = \frac{V_2 l_2}{\nu_2} = \frac{2.4 \times 6}{1.310 \times 10^{-6}} = 10.99 \times 10^6 \quad (5)$$

となる。したがって、模型船の摩擦係数 C_{f2} は、便宜上、平板の全長にわたって乱流境界層が存在する場合の Schlichting の式* ($10^6 < R_{e1} < 10^9$) を用いると

$$C_{f2} = \frac{0.455}{(\log_{10} R_{e2})^{2.58}} = \frac{0.455}{(\log_{10} 10.99 \times 10^6)^{2.58}} = 2.96 \times 10^{-3} \quad (6)$$

であるから、模型船の摩擦抵抗 D_{f2} は、式(9.23)より

$$D_{f2} = C_{f2} \frac{\rho_2}{2} V_2^2 A_2 = 2.96 \times 10^{-3} \times \frac{1000}{2} \times 2.4^2 \times \frac{4000}{25^2} = 54.56 \text{ N} \quad (7)$$

となる。また、模型船の造波抵抗 D_{w2} は

$$D_{w2} = D_2 - D_{f2} = 80 - 54.56 = 25.44 \text{ N} \quad (8)$$

となる。

次に、造波抵抗 D_w は、式(9.23)より $D_w = C_w \frac{1}{2} \rho V^2 A$ で表され、実船と模型船

との比をとると、 $A \propto l^2$ であるから次式が成立つ。

$$\frac{D_{w1}}{D_{w2}} = \frac{C_{w1} \frac{1}{2} \rho_1 V_1^2 A_1}{C_{w2} \frac{1}{2} \rho_2 V_2^2 A_2} = \frac{C_{w1} \rho_1 V_1^2 l_1^2}{C_{w2} \rho_2 V_2^2 l_2^2} \quad (9)$$

.....
* 第7章 7.1 式(7.12)を参照

ここで、造波抵抗係数 C_w は F_r の関数とすると、実船と模型船の F_r は等しいとしているから、 $C_{w1} = C_{w2}$ である。したがって

$$\frac{D_{w1}}{D_{w2}} = \frac{\rho_1 V_1^2 l_1^2}{\rho_2 V_2^2 l_2^2} \quad (10)$$

となる。ゆえに、実船の造波抵抗 D_{w1} は、

$$D_{w1} = D_{w2} \frac{\rho_1 V_1^2 l_1^2}{\rho_2 V_2^2 l_2^2} = 24.15 \times \frac{1025}{1000} \times \left(\frac{12}{2.4}\right)^2 \left(\frac{150}{6}\right)^2 = 38678 \times 10^3 \text{ N} \quad (11)$$

となる。実船の摩擦抵抗 D_{f1} は、まず、実船の R_{e1} を求めると

$$R_{e1} = \frac{V_1 l_1}{\nu_1} = \frac{12 \times 150}{1.188 \times 10^{-6}} = 151515 \times 10^6 \quad (12)$$

となる。Schlichting の式から実船の摩擦係数 C_{f1} を求めると

$$C_{f1} = \frac{0.455}{(\log R_{e1})^{2.58}} = \frac{0.455}{(\log 151515 \times 10^6)^{2.58}} = 1.49 \times 10^{-3} \quad (13)$$

となる。したがって、実船の摩擦抵抗 D_{f1} は、式(9.23)より

$$D_{f1} = \frac{1}{2} \rho_1 V_1^2 A_1 C_{f1} = \frac{1}{2} \times 1025 \times 12^2 \times 4000 \times 1.49 \times 10^{-3} = 43985 \times 10^3 \text{ N} \quad (14)$$

となる。ゆえに、実船の全抵抗 D_1 は

$$D_1 = D_{w1} + D_{f1} = 38678 \times 10^3 + 43985 \times 10^3 = 82663 \times 10^3 \text{ N} = 82663 \text{ kN} \quad (15)$$

となる。