# 第8章　演　習　問　題

**［問題 8.1］** 図 8.15 に示すように，流入速度 $V_1$ と流出速度 $V_2$ とのなす角度が 45° の曲管内を流量 4 $m^3$/min の水が流れている。断面①での圧力を 300 kPa, 内径を 200 mm，断面②での内径を 100 mm とするとき，水が曲管に及ぼす力とその方向を求めよ。ただし，重力の影響や曲管内の摩擦による損失は無視する。

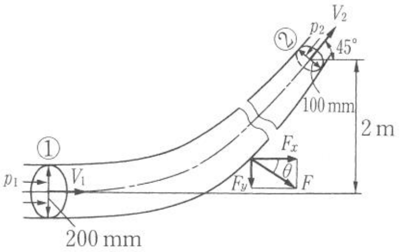

図 8.15

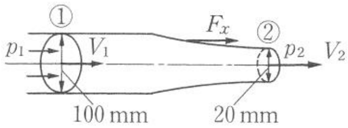

図 8.16

**［解］** 断面①，②間にベルヌーイの式(3.9)を適用して，$\rho$ =1000 kg/$m^3$，$p_1$=300 kPa=300×$10^3$ Pa，$h$=2 m を代入すると

$$\frac{300\times10^3}{1000}+\frac{{V_1}^2}{2}+0=\frac{p_2}{1000}+\frac{{V_2}^2}{2}+2g \qquad (1)$$

一方，連続の式より $V_1$, $V_2$ を求める。流量 $Q$=4 $m^3$/min=4/60 $m^3$/s，断面積 $A_1$=($\pi$/4)×$0.2^2$ $m^2$，$A_2$=($\pi$/4)×$0.1^2$ $m^2$ であるから

$$V_1=\frac{4/60}{(\pi/4)\times0.2^2}=2.12 \text{ m/s}$$

$$V_2=\frac{4/60}{(\pi/4)\times0.1^2}=8.49 \text{ m/s}$$

となる。これらの速度を式(1)に代入して，断面②の圧力 $p_2$ を求める。

$$p_2=\left(300+\frac{2.12^2}{2}-\frac{8.49^2}{2}-2\times9.8\right)\times10^3=246.6\times10^3 \text{ N/m}^2=246.6 \text{ kPa}$$

ゆえに，水が曲管に及ぼす $x$ 方向の力 $F_x$ は，式(8.5)より

$$\therefore\ F_x = \rho Q(V_1\cos\alpha_1 - V_2\cos\alpha_2) + (p_1A_1\cos\alpha_1 - p_2A_2\cos\alpha_2)$$

$$= \frac{1000\times 4}{60}(2.12\times\cos 0^\circ - 8.49\times\cos 45^\circ) + (300\times 10^3\times\frac{\pi\times 0.2^2}{4}\times\cos 0^\circ$$

$$- 246.6\times 10^3\times\frac{\pi\times 0.1^2}{4}\cos 45^\circ) = 7.8\times 10^3\ \mathrm{N} = 7.8\ \ \mathrm{kN}$$

となる。また，$y$ 方向の力 $F_y$ は，式(8.7)より

$$\therefore\ F_y = \rho\ Q(V_1\sin\alpha_1 - V_2\sin\alpha_2) + (p_1A_1\sin\alpha_1 - p_2A_2\sin\alpha_2)$$

$$= \frac{1000\times 4}{60}(2.12\times\sin 0^\circ - 8.49\times\sin 45^\circ)$$

$$+\left(300\times 10^3\times\frac{\pi\times 0.2^2}{4}\times\sin 0^\circ - 246.6\times 10^3\times\frac{\pi\times 0.1^2}{4}\times\sin 45^\circ\right)$$

$$= -1.77\times 10^3\ \ \mathrm{N} = -1.77\ \ \mathrm{kN}$$

となる。したがって，曲管に及ぼす水の力 $F$ は，式(8.8)より

$$F = \sqrt{{F_x}^2 + {F_y}^2} = \sqrt{7.8^2 + 1.77^2} = 8\ \ \mathrm{kN}$$

となり，力の方向 $\theta$ は，式(8.9)より

$$\theta = \tan^{-1}(F_y/F_x) = \tan^{-1}(-1.77/7.8) = -12.8^\circ$$

となる。

**［問題 8.2］** 図 8.16 に示すような先細ノズルの先端から高速の水が噴出している。断面①における圧力が 2 MPa(gauge)，管内径が 100 mm，ノズル出口②におけるノズル内径が 20 mm であるとして，この先細ノズルに及ぼす流れ方向の水の力を求めよ。

**［解］** ノズル内での管摩擦などの損失は無視して，断面①と出口②の間にベルヌーイの式(3.9)を適用して，$\rho$ =1000 kg/m$^3$，$p_2 = p_a$ (大気圧)= 0 (gauge)，$p_1$=2 MPa=2 ×$10^6$ Pa (gauge)，$h_1 = h_2$=0 m を代入すると

$$\frac{2\times 10^6}{1000} + \frac{{V_1}^2}{2} + 0 = 0 + \frac{{V_2}^2}{2} + 0 \qquad (1)$$

一方，連続の式より $A_1V_1 = A_2V_2$ であるから，断面積の比 $A_1/A_2 = 0.1^2/0.02^2$ を代

入すると，$V_1$，$V_2$ の比が次式で求まる。

$$V_2 = \frac{A_1}{A_2}V_1 = \frac{0.1^2}{0.02^2}V_1 = 25V_1 \tag{2}$$

式(1)，(2)より，流速 $V_1$，$V_2$ は求まり

$$V_1 = 2.53 \text{ m/s}$$

$$V_2 = 63.25 \text{ m/s}$$

となる。ゆえに流量 $Q$ は

$$Q = A_1V_1 = \frac{\pi \times 0.1^2}{4} \times 2.53 = 0.0199 \text{ m}^3\text{/s}$$

となる。水が先細ノズルに及ぼす流れ方向の力 $F_x$ は，式(8.5)を適用して，$\rho$ =1000 kg/m$^3$，$Q$=0.0199 m$^3$/s，$V_1$=2.53 m/s，$V_2$=63.25 m/s，$p_1$=2×10$^6$ Pa，$p_2$= 0，$A_1$=($\pi$/4)×0.1$^2$，$\alpha_1$=$\alpha_2$= 0° を代入すると

$$\therefore\ F_x = \rho Q(V_1\cos\alpha_1 - V_2\cos\alpha_2) + (p_1A_1\cos\alpha_1 - p_2A_2\cos\alpha_2)$$

$$= 1000 \times 0.0199(2.53 \times \cos 0° - 63.25 \times \cos 0°)$$

$$+\left(2\times 10^6 \times \frac{\pi \times 0.1^2}{4} \times \cos 0° - 0\right)$$

$$= 14.5 \times 10^3 \text{ N} = 14.5 \text{ kN}$$

**［問題 8. 3］** 図 8.17 に示すように，水平面内に置かれた 60° の曲管の中を流量 300 $l$/s の水が流れており，管端②の位置から大気中に流出している。断面①での管内径を 350 mm，管端②での管内径を 250 mm として，水が曲管に及ぼす力とその方向を求めよ。

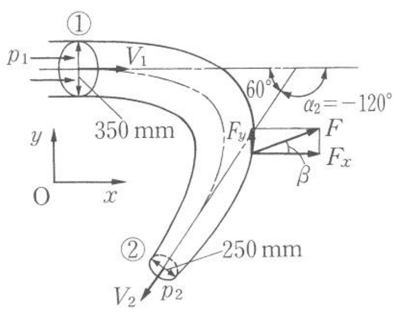


図 8.17

**［解］**連続の式$Q=V_1A_1=V_2A_2$より，断面①，②における流速$V_1$，$V_2$を求める。
$Q$=300 $l$/s=300×10$^{-3}$ m$^3$/s，$A_1$=(π/4)×0.35$^2$ m$^2$，$A_2$=(π/4)×0.25$^2$ m$^2$より

$$V_1=\frac{300\times10^{-3}}{(\pi/4)\times0.35^2}=3.12\ \text{m/s}$$

$$V_2=\frac{300\times10^{-3}}{(\pi/4)\times0.25^2}=6.11\ \text{m/s}$$

となる。次に，ベルヌーイの式を適用して断面①の圧力$p_1$(gauge)を求める。曲管は同一水平面内にあり，管出口の圧力$p_2$は大気圧$p_a$に等しいから，$p_2=p_a=0$ (gauge)である。したがって，ベルヌーイの式は

$$p_1+\frac{\rho}{2}V_1{}^2=0+\frac{\rho}{2}V_2{}^2 \tag{1}$$

となる。これより

$$p_1=\frac{\rho}{2}\left(V_2{}^2-V_1{}^2\right) \tag{2}$$

を得る。式(2)に$\rho$=1000 kg/m$^3$，$V_1$=3.12 m/s，$V_2$= 6.11 m/sを代入すると

$$p_1=\frac{1000}{2}\left(6.11^2-3.12^2\right)=13.8\times10^3\ \text{N/m}^2=13.8\ \text{kN/m}^2\,(\text{gauge})$$

となる。ゆえに，水が曲管に及ぼす$x$方向の力$F_x$は，式(8.5)を適用すれば求まる。

$$F_x=\rho\ Q(V_1\cos\alpha_1-V_2\cos\alpha_2)+(p_1A_1\cos\alpha_1-p_2A_2\cos\alpha_2) \tag{8.5}$$

いま，$V_1$の方向を$x$軸と一致させて$\alpha_1$= 0° とすると，$V_2$の方向は図8.2より$\alpha_2$=－120° となる。さらに，$\rho$=1000 kg/m$^3$，$Q$=300×10$^{-3}$ m$^3$/s，$V_1$=3.12 m/s，$V_2$=6.11 m/s，$p_1$=13800 N/m$^2$(gauge)，$p_2$= 0，$A_1$=(π/4)×0.35$^2$ m$^2$，$A_2$=(π/4)×0.25$^2$ m$^2$を上式に代入すると

$$\begin{aligned}F_x&=1000\times300\times10^{-3}\times\left\{3.12\times\cos0^\circ-6.11\times\cos(-120^\circ)\right\}\\&\quad+\left\{13800\times(\pi/4)\times0.35^2\times\cos0^\circ-0\right\}=3.18\times10^3\ \text{N}=3.18\ \text{kN}\end{aligned}$$

同様に，$y$軸方向に及ぼす力$F_y$は，式(8.7)より求まる。

$$F_y=\rho\ Q(V_1\sin\alpha_1-V_2\sin\alpha_2)+(p_1A_1\sin\alpha_1-p_2A_2\sin\alpha_2) \tag{8.7}$$

上式にそれぞれの値を代入すると，右辺第 2 項は 0 となり

$$F_y = 1000 \times 300 \times 10^{-3} \times \left\{ 3.12 \times \sin 0° - 6.11 \times \sin(-120°) \right\}$$

$$= 1.59 \times 10^3 \ \ \mathrm{N} = 1.59 \ \ \mathrm{kN}$$

となる。したがって，水が曲管に及ぼす力 $F$ は，式(8.8)より

$$F = \sqrt{{F_x}^2 + {F_y}^2} = \sqrt{3.18^2 + 1.59^2} = 3.56 \ \ \mathrm{kN}$$

力 $F$ の方向 $\beta$ は，式(8.9)より

$$\beta = \tan^{-1}\left(F_y / F_x\right) = \tan^{-1}(1.59/3.18) = 26.6°$$

となる。

**［問題 8.4］** 図 8.3 に示すような垂直に置かれた大きな平板に流量 10 $\mathrm{m^3/min}$ の水が垂直に衝突している。噴流が平板に及ぼす力を 1 kN 以下にするには，噴流の速度をいくらにおさえたらよいか。また，そのときの噴流の直径を求めよ。

**［解］** 噴流が平板に及ぼす力は，式(8.10)より $F = \rho QV$ であるから，$F$=1 kN=1 ×$10^3$ N，$\rho$ =1000 $\mathrm{kg/m^3}$，$Q$=10/60 $\mathrm{m^3/s}$ を代入すると，噴流の限界速度 $V$ は

$$V = \frac{F}{\rho Q} = \frac{1 \times 10^3}{1000 \times (10/60)} = 6 \ \ \mathrm{m/s}$$

となる。次に，噴流の直径 $d$ は，連続の式 $Q = VA = (\pi/4)\ d^2 V$ より

$$d = \sqrt{\frac{4Q}{\pi V}} = \sqrt{\frac{4 \times (10/60)}{6\pi}} = 0.188 \ \ \mathrm{m} = 18.8 \ \ \mathrm{cm}$$

となる。

**［問題 8.5］** 図 8.4 に示すような固定された小さな円板に直径 100 mm の水の噴流が速度 50 m/s で衝突している。噴流と $\theta$ = 60° の角度で円板から流れ去るとき，噴流がこの円板に及ぼす力を求めよ。

**［解］** 噴流が小円板に及ぼす力 $F$ は，式(8.11)より求まり，$\rho$ =1000 $\mathrm{kg/m^3}$，$Q$ =$AV$=($\pi$/4)×$0.1^2$×50 $\mathrm{m^3/s}$，$V$=50 m/s，$\theta$ = 60° を代入すると

$$F = \rho QV(1 - \cos\theta) = \rho AV^2(1 - \cos\theta)$$

$$=1000\times\frac{\pi\times0.1^2}{4}\times50^2(1-\cos60°)$$
$$=9.82\times10^3\ \text{N}=9.82\ \text{kN}$$

となる。

**［問題 8.6］** 図 8.18 に示すような頂角 60° の円すい体に直径 150 mm の水が速度 20m /s で衝突している場合，この円すい体に作用する噴流の力を求めよ。

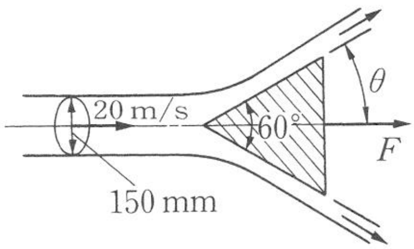


図 8.18

**［解］** 噴流は円すい体に衝突後 $\theta$ =30° の方向に流れていくので，噴流の円すい体に及ぼす力 $F$ は，式(8.11)より求まり，$\rho$ =1000 kg/m$^3$，$Q=AV=(\pi/4)\times0.15^2\times20$ m$^3$/s，$V$=20 m/s，$\theta$ =30° を代入すると

$$F=\rho QV(1-\cos\theta)=\rho AV^2(1-\cos\theta)$$

$$=1000\times\frac{\pi\times0.15^2}{4}\times20^2(1-\cos30°)=947\ \text{N}$$

となる。

**［問題 8.7］** 図 8.5 に示すような傾斜平板に直径 100 mm の水が速度 50 m/s で衝突している。傾斜角度が $\theta$ = 60° の場合，噴流が傾斜平板に及ぼす力を求めよ。

**［解］** 噴流が傾斜平板に及ぼす力 $F$ は，式(8.12)より求まり，$\rho$ =1000 kg/m$^3$，$Q=(\pi/4)\times0.1^2\times50$ m$^3$/s，$V$=50 m/s，$\theta$ =60° を代入すると

$$F=\rho QV\sin\theta=\rho AV^2\sin\theta$$

$$=1000\times\frac{\pi\times0.1^2}{4}\times50^2\times\sin60°=17.0\times10^3\ \text{N}=17\ \text{kN}$$

となる。

［問題 8.8］図 8.5 において，水平に置かれた固定した傾斜平板に沿う流れが二次元噴流と仮定する。このとき，最初の流れの流量 $Q$ が傾斜平板に衝突後，２方向に分かれて流量 $Q_1$，$Q_2$ となるとき，配分された流量 $Q_1$，$Q_2$ を最初の流量 $Q$ と角度 $\theta$ を用いて求めよ。ただし，運動量の式を適用するものとする。

［解］傾斜平板に沿う方向の運動量の変化を考える。衝突前の噴流がもっている傾斜平板方向の運動量は $\rho QV\cos\theta$，衝突後の傾斜平板方向の運動量は方向を考えて $\rho Q_1V_1$ および $-\rho Q_2V_2$ である。傾斜平板に沿う方向への力は働かないので

衝突前の運動量＝衝突後の運動量

と考えてよい。したがって，次の関係式を得る。

$$\rho QV\cos\theta=\rho Q_1V_1-\rho Q_2V_2 \qquad (1)$$

いま，傾斜平板に衝突後，運動エネルギの損失がないものとすると，衝突前後の圧力エネルギ，位置エネルギは等しいからベルヌーイの式より，
$V_1=V_2=V$ となり，次式を得る。

$$Q\cos\theta=Q_1-Q_2 \qquad (2)$$

また

$$Q=Q_1+Q_2 \qquad (3)$$

であるから，式(2)，(3)より求める $Q_1$， $Q_2$ はそれぞれ

$$Q_1=Q(1+\cos\theta)/2 \qquad (8.47)$$

$$Q_2=Q(1-\cos\theta)/2 \qquad (8.48)$$

となる。これらの式は，三次元噴流の場合にも成立する。

［問題 8.9］速度 $V$= 60 m/s，流量 $Q$= 3 m$^3$/min でノズルから噴出している水が，固定された大きな平板に垂直に衝突している。噴流がこの固定平板に及ぼす力 $F$ を求めよ。また，この平板が噴流と同じ方向に $u$=25 m/s の速さで移動しているとき，噴流がこの平板に及ぼす力 $F'$，および動力 $L$ を求めよ。

［解］噴流が大きな固定平板に及ぼす力 $F$ は，式(8.10)を用いて，$\rho$ =1000 kg/m$^3$，

$Q$=3/60 m$^3$/s，$V$= 60 m/s を代入すると

$$F = \rho\, QV = 1000 \times (3/60) \times 60 = 3 \times 10^3 \ \ \mathrm{N} = 3 \ \ \mathrm{kN}$$

となる。次に，噴流が移動している場合，平板の受ける流量 $Q'$ は，式(8.15)を変形した式に $Q$=3/60 m$^3$/s，$u$=25 m/s，$V$= 60 m/s を代入すると

$$Q' = A(V-u) = \frac{Q}{V}(V-u) = Q\left(1-\frac{u}{V}\right) = \frac{3}{60}\left(1-\frac{25}{60}\right) = 0.029 \ \ \mathrm{m^3/s}$$

となるので，移動している平板の受ける力 $F'$ は，式(8.16)より

$$F' = \rho\, Q'(V-u)$$
$$= 1000 \times 0.029 \times (60-25) = 1.02 \times 10^3 \ \ \mathrm{N} = 1.02 \ \ \mathrm{kN}$$

となる。また，噴流が平板に及ぼす動力 $L$ は，式(8.17)より求まり

$$L = F' \cdot u = 1.02 \times 10^3 \times 25$$
$$= 25.5 \times 10^3 \ \mathrm{N \cdot m/s} = 25.5 \times 10^3 \ \mathrm{J}/s = 25.5 \times 10^3 \ \mathrm{W} = 25.5 \mathrm{kW}$$

となる。

**［問題 8.10］** 図 8.19 に示すような水車の羽根に速度 $V$，流量 $Q$ の水が衝突し，羽根は速度 $u$ で動いているものとする。水車の羽根は平板で流れは平面的として，この羽根に及ぼす水の力 $F$ および動力 $L$ を求めよ。また，動力 $L$ の値が最大となる $u$ と $V$ との関係，および動力の最大値 $L_{max}$ と，このときの効率 $\eta_{max}$ を求めよ。

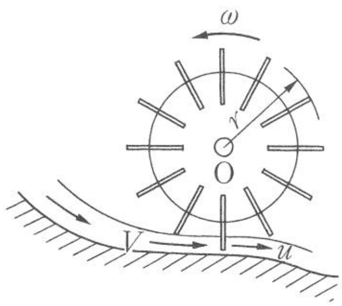


図 8.19

**［解］**題意より，速度 $u$ で動いている水車の羽根に絶対速度 $V$ の噴流が衝突するので，平板に対する噴流の相対速度は $V-u$ である。この水車の羽根は 1 枚ではなく数が多いから 8.2.5 で述べたように，噴流の断面積を $A$ とすると，羽根は常に流量 $Q=AV$ を受けていることになる。したがって，水が $u$ の速度で動いている水車の羽根に及ぼす力 $F$ は，式(8.32)において $\beta=90°$ の場合を考えて求めればよい。すなわち

$$F=\rho Q(V-u)=\rho AV(V-u) \tag{8.49}$$

となる。また，羽根の受ける動力 $L$ は

$$L=F\cdot u=\rho Q(V-u)\ u=\rho AuV(V-u) \tag{8.50}$$

となる。

動力 $L$ の式(8.50)において，羽根に衝突する噴流の流量 $Q$，および水の速度 $V$ が一定であるとすると，$L$ が最大となる時の速度 $u$ は

$$\frac{dL}{du}=0$$

の関係から求められる。すなわち

$$\frac{dL}{du}=\frac{d}{du}\left\{\rho Q(V-u)\ u\right\}=\rho Q(V-2u)=0$$

$$\therefore\ \ u=\frac{V}{2} \tag{8.51}$$

これより，動力は羽根の速度 $u$ が水の速度 $V$ の 1 / 2 のときに，最大となることがわかる。したがって，水が羽根に及ぼす動力の最大値 $L_{max}$ は，式(8.50)に $u=V/2$ を代入することによって得られ

$$L_{\max}=\rho Q\left(V-\frac{V}{2}\right)\frac{V}{2}=\frac{1}{4}\rho QV^2=\frac{\rho AV^3}{4} \tag{8.52}$$

となる。

ある羽根面を単位時間に通過する水の流れのエネルギを $L_t$ とすると，$L_t$ は水の流れの運動エネルギ，すなわち(質量)×(速度) $^2$ ／2 に等しく，$\rho Q$ は単位時間に通過する質量である。したがって，$L_t$ は，単位時間当たりのエネルギ，す

なわち動力を意味するので

$$L_t = \frac{1}{2}\rho\, QV^2 = \frac{\rho}{2}AV^3 \tag{8.53}$$

となる。ゆえに，水が羽根に作用するときに利用される動力の割合，すなわち効率の最大値 $\eta_{\max}$ は，式(8.52)と(8.53)より

$$\eta_{\max} = \frac{L_{\max}}{L_t} = \frac{1}{2} \tag{8.54}$$

となる。

**［問題 8.11］** 図 8.19 の水車において，水車の中心から羽根の先端までの距離 $r$ を 1 m，水の流れの速度を 10 m/s としたとき，この水車が最大の効率を発生できるようにするには，水車の回転数 $n$ をいくらに制御すればよいか。また，このときの水の流れが羽根に及ぼす最大の力 $F_{\max}$，最大動力 $L_{\max}$ を求めよ。ただし，羽根面に衝突する水の流れの有効断面積 $A$ を 0.2 m$^2$ とし，1 枚の羽根が水の運動エネルギを有効に得ることができ，損失等はないものとする。

**［解］** 動力が最大となるときの羽根の移動速度 $u$ は，式(8.51)より得られ，$V$=10 m/s を代入すると

$$u = \frac{V}{2} = \frac{10}{2} = 5 \ \ \text{m/s}$$

流れが羽根面に及ぼす最大の力 $F_{\max}$ は，式(8.49)に $\rho$ =1000 kg/m$^3$，$A$=0.2 m$^2$，$V$=10 m/s，$u$=5 m/s を代入して

$$F_{\max} = \rho\, Q(V-u) = \rho AV(V-u) = 1000\times 0.2\times 10\times(10-5) = 10\times 10^3 \ \ \text{N} = 10 \ \ \text{kN}$$

となる。また，羽根の受ける最大動力 $L_{\max}$ は，式(8.52)より得られ

$$L_{\max} = \frac{\rho AV^3}{4} = \frac{1000}{4}\times 0.2\times 10^3 = 50\times 10^3 \ \ \text{N} = 50 \ \ \text{kN}$$

次に，水車の角速度 $\omega$ は，周速度 $u$=5 m/s，半径 $r$ =1 m であるから

$$\omega = \frac{u}{r} = \frac{5}{1} = 5 \ \ \text{rad/s}$$

となり，毎分の回転数 $n$ は

$$n=\frac{60}{2\pi}\omega=\frac{60}{2\pi}\times 5=48\ \ \text{rpm}$$

となる。

**［問題 8.12］** 図 8.7(a)に示すような固定している曲面板に直径 100 mm，速度 50 m/s の水の噴流が曲面に沿って流入し，流れの方向が $\theta$ =120° の角度だけ変えて流出している。噴流がこの曲面板に及ぼす力，およびその方向を求めよ。

**［解］** $x$ 方向に作用する力 $F_x$ は，式(8.20)より求まり，$\rho$ =1000 kg/m$^3$，$A$=($\pi$/4)×0.1$^2$ m$^2$，$V$=50 m/s，$\theta$ =120° を代入すると

$$F_x=\rho Q(V-V\cos\theta)=\rho AV^2(1-\cos\theta)$$

$$=1000\times\frac{\pi\times 0.1^2}{4}\times 50^2\times(1-\cos 120^\circ)=29.45\times 10^3\ \ \text{N}=29.45\ \ \text{kN}$$

$y$ 方向に作用する力 $F_y$ は，式(8.21)より求まり，それぞれ上記の値を代入すると

$$F_y=-\rho QV\sin\theta=-\rho AV^2\sin\theta$$

$$=-1000\times\frac{\pi\times 0.1^2}{4}\times 50^2\times\sin 120^\circ=-17.0\times 10^3\ \ \text{N}=-17\ \ \text{kN}$$

したがって，曲面板に作用する力 $F$ は，式(8.22)より

$$F=\sqrt{{F_x}^2+{F_y}^2}=\sqrt{29.45^2+17^2}=34\ \ \text{kN}$$

となり，力の方向 $\beta$ は，式(8.23)より

$$\beta=\tan^{-1}\left(\frac{F_y}{F_x}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{-17}{29.45}\right)=-30^\circ$$

となる。

**［問題 8.13］** 図 8.8 に示すような移動している曲面板に速度 $V$=30 m/s，流量 $Q$ =2 m$^3$/min の水の噴流が曲面に沿って流入し，流れの方向が $\theta$ =45° の角度だけ

変えて流出している。曲面板の移動速度 $u$=10 m/s として，噴流がこの曲面板に及ぼす $x$，$y$ 方向の力，および動力を求めよ。

**［解］** 移動している曲面板の受ける $x$ 方向の力の成分は，式(8.26)より求まり，$\rho$ =1000 kg/m$^3$，　$V$=30 m/s，$u$=10 m/s，　$\theta$ =45°　，$A$= $Q/V$=2/(60×30) m$^2$ を代入すると

$$F_x = \rho\ Q'(V-u)\ (1-\cos\theta) = \rho A (V-u)^2 (1-\cos\theta)$$

$$= \rho \frac{Q}{V}(V-u)^2(1-\cos\theta) = 1000 \times \frac{2/60}{30}(30-10)^2(1-\cos 45°) = 130.2\ \ \mathrm{N}$$

となる。また，$y$ 方向の力の成分は，式(8.27)より求まり，それぞれ上記の値を代入すると

$$F_y = -\rho\ Q'(V-u)\ \sin\theta = -\rho A (V-u)^2 \sin\theta$$

$$= -1000 \times \frac{2/60}{30}(30-10)^2 \sin 45° = -314.3\ \ \mathrm{N}$$

となる。動力は，式(8.28)より

$$L = F_x \cdot u = 130.2 \times 10 = 1302\ \mathrm{J/s} = 1302\ \mathrm{W}$$

となる。

**［問題 8.14］** 図 8.20 に示すように，流速 60 m/s，直径 100 mm の水がノズルから噴出し，$u$=50 m/s で移動しているバケットに衝突している。噴流はバケットで 180°　方向を曲げられるとして，噴流がこのバッケットに及ぼす力，およびバケットの動力を求めよ。

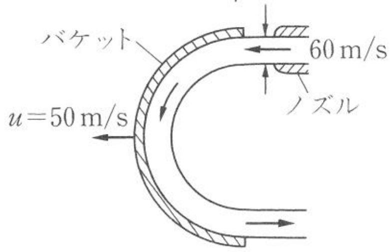


図 8.20

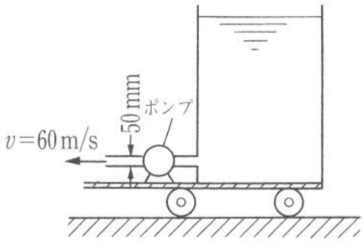


図 8.21

**［解］**噴流がバケットに及ぼす力 $F$ は, 式(8.30)より求まり，$\rho$ =1000 kg/m$^3$, $A$=($\pi$ /4)×0.1$^2$ m$^2$ ，$V$=60 m/s，$u$=50 m/s およびここでは $\beta$ ＝0° と考えてよいので，これらを代入すると

$$F=\rho\, Q'(V-u)\ (1+\cos\beta)=\rho A(V-u)^2(1+\cos\beta)$$
$$=\rho A(V-u)^2(1+\cos 0^\circ)$$
$$=2\rho A(V-u)^2$$
$$=2\times1000\times\frac{\pi\times0.1^2}{4}(60-50)^2=1.57\times10^3\ \ \mathrm{N}=1.57\ \ \mathrm{kN}$$

動力 $L$ は，式(8.31)より

$$L=F\cdot u=1.57\times10^3\times50=78.5\times10^3\ \ \mathrm{J/s}=78.5\times10^3\ \ \mathrm{W}=78.5\ \ \mathrm{kW}$$

**［問題 8.15］** 図 8.21 に示すように，台車の上に置かれた水槽の水をポンプによって直径 50 mm のノズルから 60 m/s の速度で大気中に噴出している。この台車が推力によって動かないようにするには，どれほどの力が必要か。

**［解］** 台車が動かないようにするためには，ジェットによる推力と同じ力で反対方向に押す力が必要であるから，求める力 $F_t$ は式(8.35)より得られ， $\rho$ =1000 kg/m$^3$，$a$ = ($\pi$ /4)×0.05$^2$ m$^2$，$V$= 60 m/s を代入すると

$$F_t=\rho\, QV=\rho\, aV^2=1000\times\frac{\pi\times0.05^2}{4}\times60^2=7.07\times10^3\ \ \mathrm{N}=7.07\ \ \mathrm{kN}$$

となる。

**［問題 8.16］** 図 8.22 に示すように，船首より取り入れた水をポンプによって船尾から後方に噴出させ，そのジェット推進力で進む船が絶対速度 $c$=54 km/h の速さで，$u$=3 m/s で流れている川を上流に向って進んでいる。この船に対する水の噴流の相対速度を $V_2$=30 m/s, 流量を $Q$=2 m$^3$/s として, この船の推進力, および動力を求めよ。

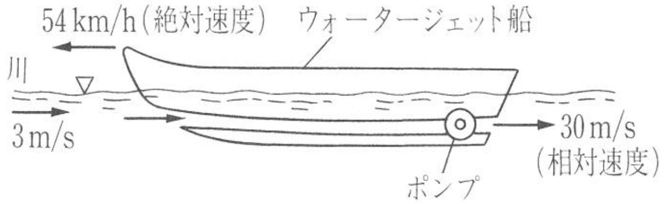


図 8.22

**［解］** 船尾より噴出する噴流の船に対する相対速度は $V_2$=30 m/s，船の川の流れに対する相対速度 $V_1$ は，$c$=54 km/h=54×10$^3$/3600 m/s，$u$=3 m/s であるから

$$V_1 = c + u = \frac{54\times10^3}{3600} + 3 = 18 \ \text{m/s}$$

船の推進力 $F_t$ は, 相対速度を基準にとって, 運動量の法則を適用すれば求まる。

$$F_t = \rho\, QV = \rho\, Q(V_2 - V_1) = 1000\times2\times(30-18) = 24\times10^3 \ \text{N} = 24 \ \text{kN}$$

動力 $L$ は

$$L = F_t V_1 = 24\times10^3\times8 = 192\times10^3 \ \text{J/s} = 192\times10^3 \ \text{W} = 192 \ \text{kW}$$

となる。

**［問題 8. 17］** 図 8.11 に示すように，ターボジェットエンジンを搭載したジェット機が質量流量 $G$=2 kg/s の空気を取り入れながら，$v_0$=150 m/s の速度で飛行している。排気ガスの相対速度を $w_e$=700 m/s としたときのジェットの推力 $F_t$, およびエンジンの動力 $L$ を求めよ。

**［解］** ジェットの推力 $F_t$ は，流入，流出の質量流量 $G$ を一定とすると，式(8.39)より求まる。

$$F_t = \rho\, Q(w_e - v_o) = G(w_e - v_o) = 2\times(700-150) = 1100 \ \text{N} = 1.1 \ \text{kN}$$

また，エンジンの動力 $L$ は，式 (8.38)より

$$L = F_t\cdot v_o = 1100\times150 = 165\times10^3 \ \text{W} = 165 \ \text{kW}$$

となる。

［問題 8.18］図 8.23 に示すように，水量 $Q$=30 $l$/s の噴流が鉛直方向から 45° 曲げられた固定平板に速度 $V=30$m/s で衝突し，上下に分岐して流れている。噴流が固定平板に及ぼす $x, y$ 方向の力 $F_x$ , $F_y$ およびその合力 $F$ を求めよ。また，合力 $F$ が水平軸となす角度 $\beta$ を求めよ。

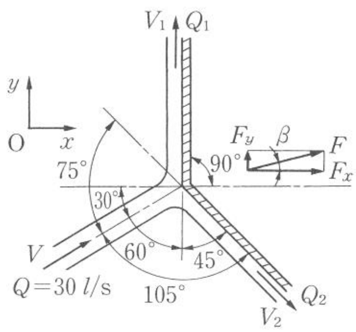


図 8.23

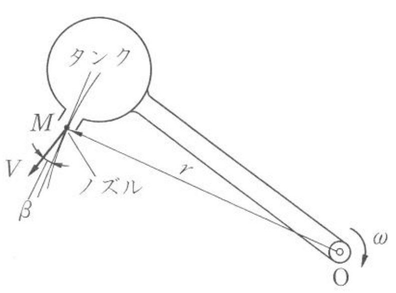


図 8.24

［解］流量 $Q$ を $Q_1$ と $Q_2$ に配分するには，（問題 8.8）と同様に平板に平行な流れの運動量を考えて求める。平板の方向に外力は作用しないので

衝突前の運動量＝衝突後の運動量

と考えられる。衝突前の噴流の鉛直方向の運動量は $\rho QV\cos 60° = \rho QV\sin 30°$ であり，45° 曲げられた方向の運動量は $\rho QV\cos 105° = -\rho QV\cos 75°$ である。また，衝突後の噴流のそれぞれの平板方向の運動量は方向を考えて，$\rho Q_1V_1$ および $-\rho Q_2V_2$ であるから式(1)を得る。

$$\rho(QV\sin 30° - QV\cos 75°) = \rho Q_1V_1 - \rho Q_2V_2 \qquad (1)$$

平板に沿う方向に流れの損失がないものとすると，$V=V_1=V_2$ であり，$\rho$=一定であるから

$$(Q\sin 30° - Q\cos 75°) = Q_1 - Q_2$$

ゆえに

$$0.24Q = Q_1 - Q_2 \qquad (2)$$

となる。一方

$$Q = Q_1 + Q_2 \tag{3}$$

の関係式が成立つから，式(2) ,(3)より $Q_1$， $Q_2$ は次式で表され， $Q$=30 $l$/s=30×$10^{-3}$ m$^3$/s を代入すると

$$Q_1 = 0.62Q = 0.62 \times 30 \times 10^{-3} = 18.6 \times 10^{-3} \ \mathrm{m^3/s}$$

$$Q_2 = 0.38Q = 0.38 \times 30 \times 10^{-3} = 11.4 \times 10^{-3} \ \mathrm{m^3/s}$$

となる。次に，運動量の法則より $x$ 方向の力 $F_x$ は，鉛直平板の $x$ 方向の運動量は 0 であるから

$$F_x = \rho\left(QV\cos 30^\circ - Q_2V_2\cos 45^\circ\right)$$
$$= 1000 \times \left(30 \times 10^{-3} \times 30 \times \cos 30^\circ - 11.4 \times 10^{-3} \times 30 \times \cos 45^\circ\right) = 537.6 \ \mathrm{N}$$

となり， $y$ 方向の力 $F_y$ は

$$F_y = \rho \ \left\{QV\sin 30^\circ - \left(Q_1V_1 - Q_2V_2\sin 45^\circ\right)\right\}$$
$$= \rho\left(QV\sin 30^\circ - Q_1V_1 + Q_2V_2\sin 45^\circ\right)$$
$$= 1000 \times (30 \times 10^{-3} \times 30 \times \sin 30^\circ - 18.6 \times 10^{-3} \times 30$$
$$+ 11.4 \times 10^{-3} \times 30 \times \sin 45^\circ$$
$$= 133.8 \ \mathrm{N}$$

となる。ゆえに合力 $F$ は

$$F = \sqrt{{F_x}^2 + {F_y}^2} = \sqrt{537.6^2 + 133.8^2} = 554 \ \mathrm{N}$$

となり，方向 $\beta$ は

$$\beta = \tan^{-1}\left(F_y / F_x\right) = \tan^{-1}(133.8/537.6) = 14^\circ$$

となる。

**［問題 8.19］** 図 8.24 に示すように，タンクのノズルから噴流が噴出し，O点まわりに回転できるようになっている。噴流の反動力，すなわちタンクの受ける推力 $F_t$ の作用点は，ノズル出口部M点にある。噴流の方向は円周方向と角度 $\beta$ をなし，O点とM点の距離を $r$，ノズルから噴出する速度を $V$，流量を $Q$，角速度を ω とするとき，タンクに生ずる動力 $L$ 求めよ。

**［解］**噴流によってタンクの受ける推力 $F_t$ は，$V$，$Q$ が常に一定に保たれているとすると，式(8.35)より

$$F_t = \rho QV$$

$F_t$ の周方向の成分は $F_t\cos\beta$ であるから，モーメント $M$ は次式で求まる。

$$M = F_t r\cos\beta = \rho QVr\cos\beta \tag{8.55}$$

次に，タンクに生じる動力 $L$ は，式(8.46)に示したように，モーメント $M$ と角速度 $\omega$ との積で求まるから

$$L = \omega\cdot M = \omega\rho QVr\cos\beta \tag{8.56}$$

となる。

**［問題 8.20］**図 8.25 に示すような曲面板に水が衝突し，曲面板はO点まわりに回転できるように支持されている。曲面板が回転できないようにするには，O点にいくらのモーメントを加えたらよいか。ただし，水の流量を 40 $l$/s，速度を 35 m/s，$y_1$=30 cm，$y_2$=100 cm とする。

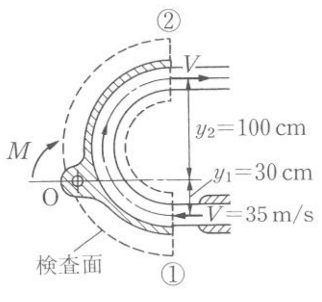


図 8.25

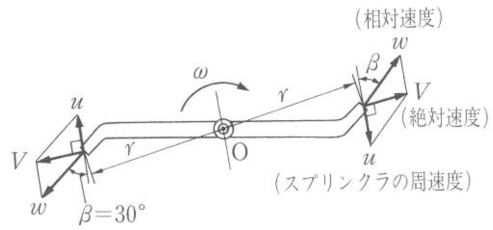


図 8.26

**［解］**検査面①に流入する単位時間当りの水の角運動量 $T_1$ は，式(8.43)より

$$T_1 = r\cdot F_\theta = \rho QV\cdot y_1 \tag{1}$$

同様に，検査面②において流出する単位時間当りの水の角運動量 $T_2$ は

$$T_2 = r\cdot F_\theta = \rho QV\cdot y_2 \tag{2}$$

となる。

検査面内部の流体が受けるモーメント $M$ は, その検査面を通って単位時間に流出する角運動量 $T_2$ と流入する角運動量 $T_1$ との差で表される。すなわち，式(1)と(2)の差で表されるから

$$M = T_2 - T_1 = \rho\, QV\ (y_2 - y_1) \qquad (3)$$

となる。したがって，曲面板が回転できないようにするためにO点に加えるモーメント $M$ は，式(3)に $\rho$=1000 kg/m$^3$，$Q$=40×10$^{-3}$ m$^3$/s，$V$=35 m/s，$y_1$=0.3 m，$y_2$=1 m を代入すると求まり

$$M = T_2 - T_1 = \rho\, QV\ (y_2 - y_1) = 1000 \times 0.04 \times 35 \times (1 - 0.3) = 980\ \ \mathrm{N \cdot m}$$

となり，したがって，980 N･m 以上のモーメントを加えるとよいことになる。

**［問題 8.21］**図 8.26 に示すようなスプリンクラで流量 $Q$ =300 $l$/min の水を，直径 $d$=12 mm のノズルから噴出させて散水している。噴流がスプリンクラに及ぼす接線方向の力 $F_t$，毎分の回転速度 $n$，およびアームの回転を止めるのに必要なトルク $T$ を求めよ。ただし，ノズルの角度 $\beta$=30°，スプリンクラの回転半径 $r$=50 cm とし，回転に伴う摩擦損失は無視する。

**［解］**一つのノズルからの噴流の反作用によってスプリンクラに及ぼす接線方向の力 $F_t$ は，運動量の法則を適用すれば求まる。一つのノズルから流出する噴流の流量は $Q/2$ であり，ノズルの断面積を $A$ とすると，ノズルから噴出する水の相対速度は $w$=( $Q$/2)/$A$ となる。スプリンクラ流入時の接線方向の運動量は 0 であるから，接線方向の力 $F_t$ は運動量の法則より

$$F_t = \rho(Q/2)\ (w\cos\beta - 0) = \rho(Q/2)\ w\cos\beta = \rho A w^2 \cos\beta \qquad (8.57)$$

となる。スプリンクラの二つのノズルから噴出される噴流によるトルク $T$ は，回転半径を $r$ とすると

$$T = 2F_t \cdot r \qquad (1)$$

より求められる。そこで，まず相対速度 $w$ を求める。 $Q$ = 300 $l$/min = 300×10$^{-3}$/60 m$^3$/s，$A$=($\pi$/4)×0.012$^2$ m$^2$ を次式に代入すると

$$w=\frac{Q/2}{A}=\frac{\frac{300}{60}\times10^{-3}\times\frac{1}{2}}{(\pi/4)\times0.012^2}=22.1\ \ \text{m/s} \tag{2}$$

したがって, 接線方向の力 $F_t$ は, 式(8.57)に $\rho$ =1000 kg/m$^3$, $A$=($\pi$ /4)×0.012$^2$ m$^2$, $w$=22.1 m/s, $\beta$ =30° を代入すると求まり

$$F_t=\rho Aw^2\cos\beta$$
$$=1000\times(\pi/4)\times0.012^2\times22.1^2\times\cos30^\circ=47.84\ \ \text{N} \tag{3}$$

となる。ゆえに，スプリンクラの回転を止めるに必要なトルク $T$ は，式(1)より求まり，$r$ = 0.5 m であるから

$$T=2F_t\cdot r=2\times47.84\times0.5=47.84\ \ \text{N}\cdot\text{m} \tag{4}$$

となる。

次に，角運動量の法則を用いて，スプリンクラの毎分回転数 $n$ を求める。スプリンクラに流入するときの水の角運動量は 0 であり，ノズルから流出するまでに生じる管内摩擦損失や回転に伴う抵抗損失は無視するから，これらの外部からの力によるトルクは 0 である。ゆえに，スプリンクラが定常な回転に達したときのノズルから流出する水の角運動量は 0 でなければならない。したがって，角運動量の法則を適用すれば次式が成り立つ。

$$T=2F_t\cdot r=2\rho(Q/2)(w\cos\beta-u)r=\rho\,Q(w\cos\beta-u)r=0 \tag{8.58}$$

ここで，回転角速度を $\omega$，半径 $r$ における周速度を $u$ とすると，$u$=$\omega r$ の関係があるから

$$w\cos\beta-u=w\cos\beta-\omega r=0 \tag{5}$$

これより，$\omega$ は

$$\omega=\frac{w\cos\beta}{r}=\frac{22.1\times\cos30^\circ}{0.5}=38.28\ \ \text{rad/s} \tag{6}$$

となる。ゆえに，毎分回転数 $n$ は，$2\pi rn/60=r\omega$ より

$$n=\frac{60}{2\pi}\omega=\frac{60}{2\pi}\times38.28=366\ \text{rpm} \tag{7}$$

となる。

**［問題 8. 22］** 図 8.27 に示すように，検査面①において長方形の噴流が，検査面②でそれと同じ幅をもつ速度 $u$ で移動している溝形の板に当って方向を変え，上下に分かれて流出している。噴流が溝形の板に及ぼす力 $F$ は

$$
\begin{aligned}
F &= \rho\, Q\left(V_1 \cos\alpha_1 - V_2 \cos\alpha_2\right) \\
&= \rho\, Q\left(V_1 \cos\alpha_1 - u - \cos\beta_2 \sqrt{u^2 + {V_1}^2 - 2uV_1 \cos\alpha_1}\right)
\end{aligned}
\tag{8.59}
$$

動力 $L$ は

$$
\begin{aligned}
L &= F \cdot u = \rho\, Q\, u\left(V_1 \cos\alpha_1 - V_2 \cos\alpha_2\right) \\
&= \rho\, Q\, u\left(V_1 \cos\alpha_1 - u - \cos\beta_2 \sqrt{u^2 + {V_1}^2 - 2uV_1 \cos\alpha_1}\right)
\end{aligned}
\tag{8.60}
$$

あるいは

$$
L = \frac{\rho\, Q\left({V_1}^2 - {V_2}^2\right)}{2} \tag{8.61}
$$

また，噴流が動いている板に作用する効率 $\eta$ は

$$
\eta = 1 - \frac{{V_2}^2}{{V_1}^2} \tag{8.62}
$$

で表されることを証明せよ。ただし，$Q$は板に沿って流れる噴流の流量，$u$ は板の速度，$V_1$ は噴流の最初の絶対速度，$\alpha_1$ は $u$ と $V_1$ とのなす角度，$\beta_2$ は $u$ と板の方向のなす角度である。流れは平面的であり，重力は作用しないものとする。

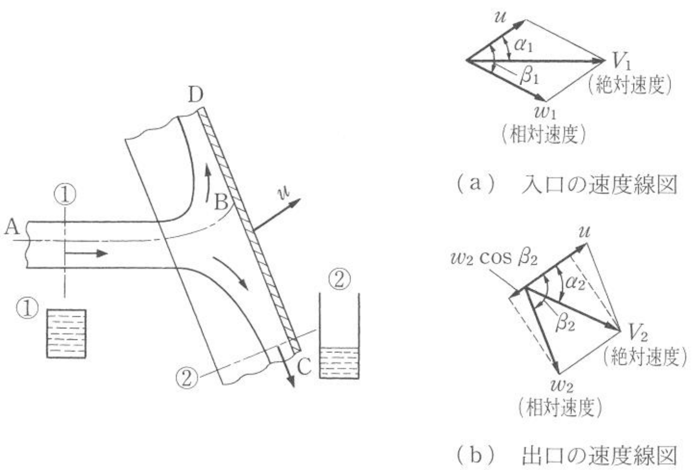


図 8.27

**［解］**流れは二次元流れであり，流れは分岐流線ＡＢで上下に分かれるが，簡単のためにＡＢＣの片方の領域の流れだけを考えることにする。図(a)，(b)における $w_1$， $w_2$ は，それぞれ検査面①，②における噴流の板に対する相対速度であり， $w_2$ の方向は，板に平行であるが，大きさは等しく $w_1 = w_2$ となる。$u$ 方向における絶対速度の変化は

$$V_1\cos\alpha_1 - V_2\cos\alpha_2 \qquad (1)$$

図(b)の速度線図より

$$u = V_2\cos\alpha_2 - w_2\cos\beta_2$$

$$\therefore\ V_2\cos\alpha_2 = u + w_2\cos\beta_2 \qquad (2)$$

となる。ここで $\cos\beta_2$ は，$90° < \beta_2 < 180°$ の間にあるから，$\cos\beta_2 < 0$ で負の値となる。式(2)を(1)に代入して

$$V_1\cos\alpha_1 - V_2\cos\alpha_2 = V_1\cos\alpha_1 - \left(u + w_2\cos\beta_2\right) \qquad (3)$$

となる。図(a)の速度線図より，幾何学的に

$$w_1{}^2 = u^2 + V_1{}^2 - 2uV_1\cos\alpha_1 \qquad (4)$$

が成立するから

$$w_1 = \sqrt{u^2 + V_1{}^2 - 2uV_1\cos\alpha_1} \qquad (5)$$

いま， $w_1 = w_2$ であるから式(3)の絶対速度の変化は，式(5)を式(3)に代入して

$$\begin{aligned} V_1\cos\alpha_1 - V_2\cos\alpha_2 &= V_1\cos\alpha_1 - \left(u + w_2\cos\beta_2\right) \\ &= V_1\cos\alpha_1 - u - \cos\beta_2\sqrt{u^2 + V_1{}^2 - 2uV_1\cos\alpha_1} \qquad (6) \end{aligned}$$

となる。したがって，噴流が板に及ぶす力 $F$ は，単位時間当たりの運動量の変化に等しいので

$$\begin{aligned} F &= \rho\, Q\left(V_1\cos\alpha_1 - V_2\cos\alpha_2\right) \\ &= \rho\, Q\left(V_1\cos\alpha_1 - u - \cos\beta_2\sqrt{u^2 + V_1{}^2 - 2uV_1\cos\alpha_1}\right) \end{aligned} \qquad (7)$$

となり，式(8.59)と一致する。

次に，噴流が板になした仕事，つまり動力は

$$L = F \cdot u \qquad (8)$$

で表されるから，式(7)，(8)より

$$L = \rho\ Q\ u\left(V_1 \cos\alpha_1 - V_2 \cos\alpha_2\right)$$
$$= \rho\ Q\ u\left(V_1 \cos\alpha_1 - u - \cos\beta_2 \sqrt{u^2 + {V_1}^2 - 2uV_1 \cos\alpha_1}\right) \tag{9}$$

となり，式(8.60)と一致する。

次に，図(b)の速度線図において，幾何学的に

$${w_2}^2 = u^2 + {V_2}^2 - 2uV_2 \cos\alpha_2 \tag{10}$$

であるから，式(4)と(10)を整理すると，それぞれ

$$V_1 \cos\alpha_1 = \frac{u^2 + {V_1}^2 - {w_1}^2}{2u}$$

$$V_2 \cos\alpha_2 = \frac{u^2 + {V_2}^2 - {w_2}^2}{2u}$$

となるから，これらを式(9)に代入すると

$$L = \rho\ Q\ u\left(V_1 \cos\alpha_1 - V_2 \cos\alpha_2\right)$$
$$= \rho\ Q\left(\frac{u^2 + {V_1}^2 - {w_1}^2}{2} - \frac{u^2 + {V_2}^2 - {w_2}^2}{2}\right)$$
$$= \frac{\rho\ Q\left({V_1}^2 - {w_1}^2 - {V_2}^2 + {w_2}^2\right)}{2} \tag{11}$$

なお，$w_1 = w_2$であるから，式(11)は

$$L = \frac{\rho\ Q\left(\ {V_1}^2 - {V_2}^2\right)}{2} \tag{12}$$

となり，式(8.61)と一致する。

また，噴流の有する運動エネルギ $L_t$ は，(質量)×(速度)$^2$／２であり，質量は $\rho\ Q$となり，この場合の質量は噴流が単位時間に通過する質量を表している。したがって，運動エネルギ $L_t$ は，噴流の単位時間当たりのエネルギ，すなわち動力を意味するので

$$L_t = \frac{1}{2}\rho\ Q{V_1}^2 \tag{13}$$

となる。したがって，噴流が板に作用する効率 $\eta$ は式(12)，(13)より

$$\eta = \frac{L}{L_t} = 1 - \frac{{V_2}^2}{{V_1}^2} \tag{14}$$

となり，式(8.62)が導かれる。

**［問題 8. 23］**図 8.28 に示すように, 曲管の容器が $x$ 軸の方向に $u$ の速度で動き, 容器の上部から相対速度 $w_1$ の速度で水が流入し，$w_2$ の相対速度で容器から流出しているとする。この場合の $x$ 方向の反動力の成分 $F_x$ ，およびそれによってなされる動力 $L_x$ が，それぞれ次式で表されることを証明せよ。

$$F_x = \rho\ Q(w_1 \cos\beta_1 - w_2 \cos\beta_2) \tag{8.63}$$

$$L_x = \rho\ Q \cdot u(w_1 \cos\beta_1 - w_2 \cos\beta_2) \tag{8.64}$$

ただし， $Q$は流量， $\beta_1$， $\beta_2$ はそれぞれ $u$ と $w_1$, および $w_2$ の間の角度である。

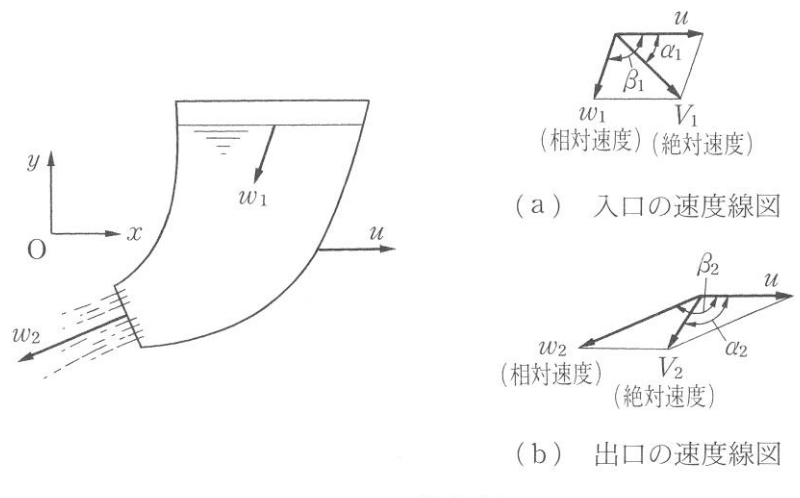


図 8.28

**［解］**容器の入口と出口における速度線図は, 図(a), (b)に示すとおりである。反動力の力の成分 $F_x$ は，（問題 8.22）と同じ考え方で，$x$ 方向の単位時間当たりの運動量の変化，すなわち，単位時間に流れる水の質量 $\rho\ Q$と $x$ 方向の速度の変化$(V_1 \cos\alpha_1 - V_2 \cos\alpha_2)$の積に等しいから

$$F_x = \rho\, Q\left(V_1 \cos\alpha_1 - V_2 \cos\alpha_2\right) \qquad (1)$$

となる。

次に，$u$ の速度で動く容器に噴流がなす動力は，式(8.60)と同様に

$$L_x = F_x \cdot u = \rho\, Q\, u\left(V_1 \cos\alpha_1 - V_2 \cos\alpha_2\right) \qquad (2)$$

となる。

一方（問題 8.22）で述べたように，速度線図より

$$V_1 \cos\alpha_1 = u + w_1 \cos\beta_1 \qquad (3)$$

$$V_2 \cos\alpha_2 = u + w_2 \cos\beta_2 \qquad (4)$$

の関係があるので，式(3)，(4)を，それぞれ式(1)，(2)に代入すると

$$F_x = \rho\, Q\left(w_1 \cos\beta_1 - w_2 \cos\beta_2\right) \qquad (5)$$

$$L_x = \rho\, Q \cdot u\left(w_1 \cos\beta_1 - w_2 \cos\beta_2\right) \qquad (6)$$

となり，これらは式(8.63)，(8.64)と一致する。

**［問題 8.24］** 図 8.29 に示すような形状の羽根をもつ衝動タービンにおいて，水の噴流の羽根入口での絶対速度が $V_1$=22 m/s，羽根の周速度が $u$=12.7 m/s，流量が $Q$=40 $l$/s であり，$\alpha_1$，$\beta_1$，$\beta_2$は，それぞれ 30°，60°，135° であるとき，衝動タービンの出力 $L$，および効率 $\eta$ を求めよ。ただし，噴流が羽根面に沿って流れるときのエネルギ損失はないものとして計算せよ。

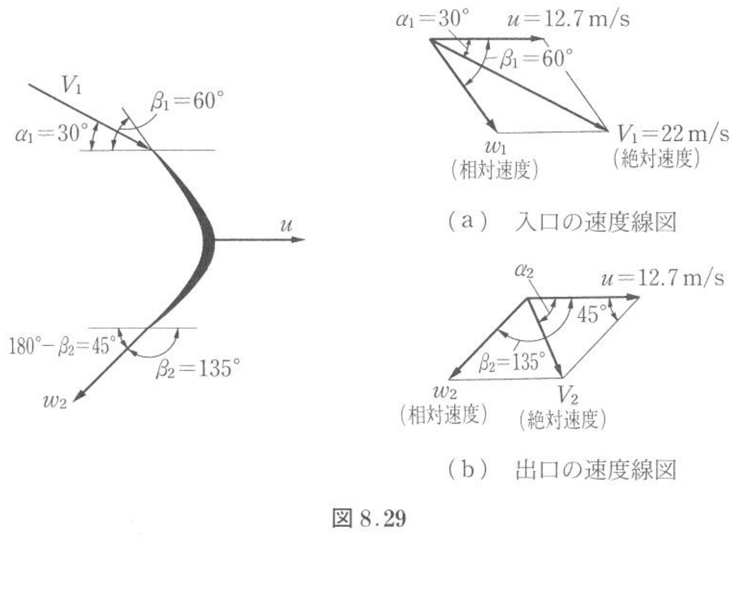


図 8.29

**［解］**図(a)に示す羽根入口における速度線図より，幾何学的に

$$w_1^{\,2} = u^2 + V_1^{\,2} - 2uV_1\cos\alpha_1 \qquad (1)$$

であり，また，羽根面に沿ってのエネルギ損失はないから，$w_1 = w_2$と考えてよいので，結果的に動力と効率は，式(8.61)，(8.62)を用いて求められる。まず，入口での相対速度 $w_1$ は，式(1)を用い，図(a)の入口速度線図に示された値を代入すると

$$w_1 = \sqrt{u^2 + V_1^{\,2} - 2uV_1\cos\alpha_1}$$

$$= \sqrt{12.7^2 + 22^2 - 2\times12.7\times22\times\cos30^\circ} = 12.7 \quad \text{m/s}$$

となる。次に，図(b)の出口の速度線図より幾何学的に

$$V_2^{\,2} = u^2 + w_2^{\,2} - 2uw_2\cos(180^\circ - \beta_2) \qquad (2)$$

であり，なお，$w_1 = w_2 = 12.7$ m/s，$u$=12.7 m/s，$\beta_2$=135° を次式に代入すると，絶対速度 $V_2$ は

$$V_2 = \sqrt{u^2 + w_2^{\,2} - 2uw_2\cos(180^\circ - \beta_2)}$$

$$= \sqrt{12.7^2 + 12.7^2 - 2\times12.7\times12.7\times\cos45^\circ} = 9.72 \quad \text{m/s}$$

となる。したがって，動力 $L$ は，式(8.61)に $\rho$ =1000 kg/m$^3$，$Q$=40 $l$/s=0.04 m$^3$/s，$V_1$=22 m/s，$V_2$=9.72 m/s を代入すると

$$L = \frac{\rho Q\left(V_1^{\,2} - V_2^{\,2}\right)}{2}$$

$$= \frac{1000\times0.04\times\left(22^2 - 9.72^2\right)}{2} = 7.79\times10^3 \ \text{J/s} = 7.79\times10^3 \ \text{W} = 7.79 \quad \text{kW}$$

となり，効率 $\eta$ は，式(8.62)より

$$\eta = 1 - \frac{V_2^{\,2}}{V_1^{\,2}} = 1 - \frac{9.72^2}{22^2} = 0.805$$

すなわち，80.5％となる。