

# 5.8 粘性流れの管路の総損失

<実在流体 ⇒ **修正ベルヌーイの式** modified Bernoulli's equation >

粘性をもつ実際の流れの損失は、次の修正ベルヌーイの式で求める。

$$\frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} + z_1 = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{2g} + z_2 + H_t \quad (5.19)$$

$H_t$ : 総損失水頭

水力こう配線 = 位置水頭 + 圧力水頭

エネルギー線 = 位置水頭 + 圧力水頭 + 速度水頭

すなわち  $z + \frac{p}{\rho g} + \frac{v^2}{2g}$

$$H_t = \sum_{\text{①-②}} \lambda \frac{l v^2}{d 2g} + \sum_{\text{①-②}} \zeta \frac{v^2}{2g} \quad (5.20)$$

①-②間の管摩擦損失水頭

①-②間の管摩擦以外の損失水頭 (急拡大による損失、弁の損失 × 個数、その他の損失)

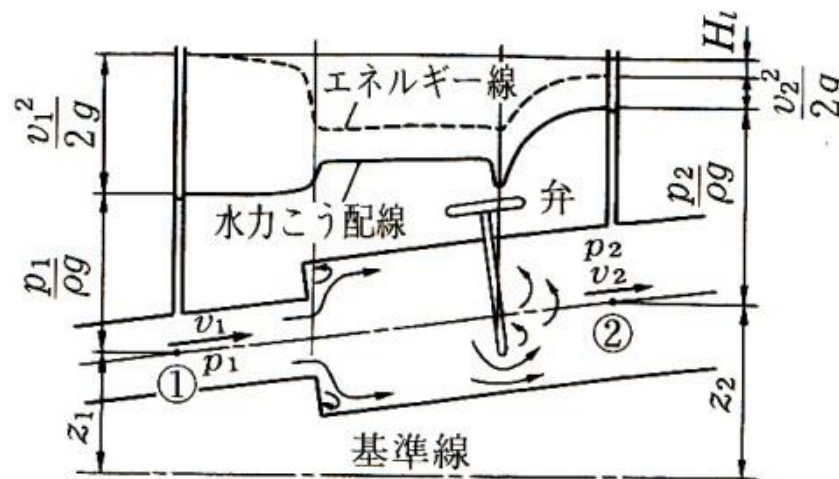


図5.14 水力こう配線とエネルギー線

$\zeta$ : 弁、急拡大等の損失係数

$$\frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} + z_1 = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{2g} + z_2 + \sum_{\text{①-②}} \lambda \frac{l v^2}{d 2g} + \sum_{\text{①-②}} \zeta \frac{v^2}{2g} \quad (5.21)$$

# 6.層流と乱流 & 遷移流

Laminar flow, turbulent flow, transition flow

## ● レイノルズ数 $Re$ Reynolds number

1883年 レイノルズ(O.Reynolds)が、可視化実験で発見！

流体力学上の問題について次元解析を行う場合にレイノルズ数は有効。異なる実験ケース間での力学的相似性を評価するのに利用。

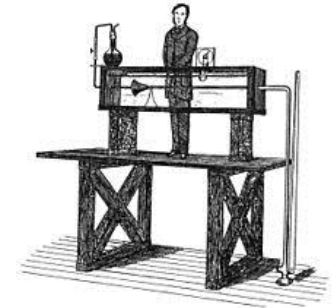
オズボーン・レイノルズ；  
Osborne Reynolds(1842~1912)

$$Re = \frac{Vd}{\nu} = \frac{\rho Vd}{\mu} = \frac{\text{慣性力}}{\text{粘性力}} \quad : \quad \text{無次元数} \quad (6.1)$$

$Re$  : レイノルズ数、 $V$  : 平均速度、 $\nu$  : 動粘度、 $\mu$  : 粘度、 $\rho$  : 密度、 $d$  : 代表長さ(円; 直径)

層流から乱流に移行する遷移流のあることを見出した！

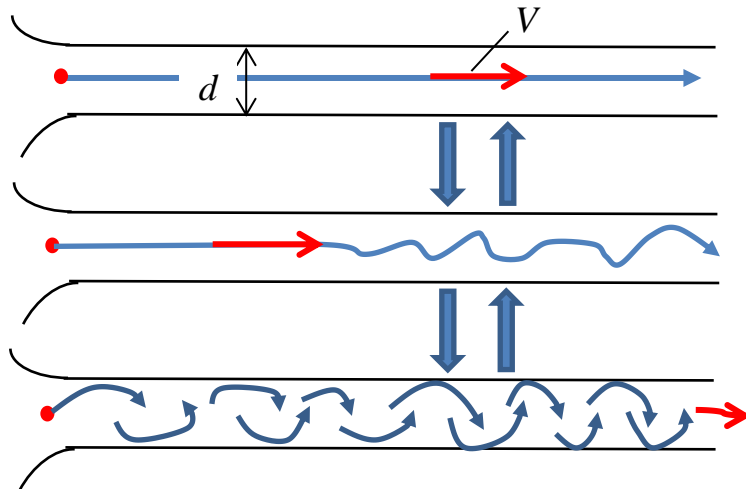
遷移のおこるレイノルズ数を **臨界レイノルズ数** critical Reynolds number という。



臨界レイノルズ数:

$$Re_c = 2,340 \approx 2,300 \approx 2,000$$

レイノルズ数  $Re$  が、おおよそ2000を境に層流か乱流を判断する指標として使用される。



**層流**: 一本のきれいな流線、層状の流れ

$Re < 2,340$  の場合には、流れは層流となる。

**遷移流**: 不安定な流れ。再現性ナシ。

**乱流**: 乱れた流れ

$Re > 2,340$  の場合には、流れは乱流となる。

層流から乱流、乱流から層流へのいきなりの移行はナシ！  
必ず遷移流を経て移行する。

図6.1 レイノルズの可視化実験 (ガラス管内のインクの流れの様子)

# 7. 相似則と次元解析

## 要約

研究室での模型実験の結果が、実用上の設計に適用，応用され，現在，種々の流体機械の設計，ならびに航空機や新幹線などの形状設計に大いに役立っている。さらに，実験に次元解析や相似則を導入にすることによって，実験に要する時間を大幅に軽減できる利点があり，流体工学上の諸問題を解明するのに有用な方法としてよく利用されている。

模型と実物との間には形状および流れに対する姿勢が幾何学的に相似であることが必要である。さらに，模型と実物まわりの流れの速度などが運動学的に相似であることと，これらの物体に働く力などが力学的に相似であることが必要である。

模型と実物まわりの流れの現象が相似になることを相似則 (law of similarity) という。相似則が成立するためには，模型と実物の間で幾何学的相似 (geometric similarity)，運動学的相似 (kinematic similarity)，力学的相似 (dynamic similarity) が成立することが必要である。

模型による実験 → 実物の性能の推定、設計への応用に役立てる！

$$R_e = \frac{Vd}{\nu} = \frac{\rho Vd}{\mu} = \frac{\text{慣性力}}{\text{粘性力}} : \text{無次元数} \quad (7.1)$$

実物と模型のレイノルズ数を同一にする！⇒ 相似則 成立

$$R_{e1} = \frac{V_1 L_1}{\nu_1} = \text{実物} \quad (7.2)$$

$$R_{e2} = \frac{V_2 L_2}{\nu_2} = \text{模型} \quad (7.3)$$

つまり、 $R_{e1} = R_{e2}$  となるようにするとよい。

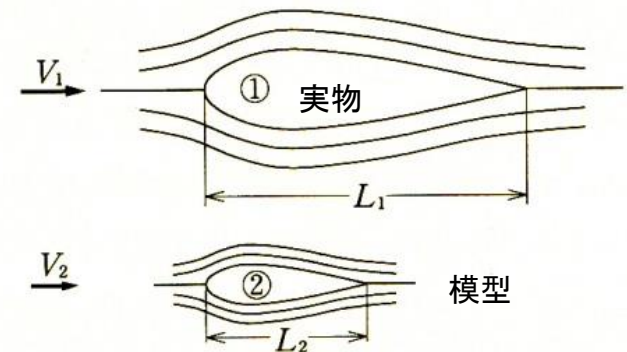


図7.1 模型と実物

# 7.1 相似則

流体力学における模型(model)を用いた実験は、実物(prototype)の性能を推定したり、設計への応用に重要な役割を果たす。たとえば、ポンプ、水車、自動車、新幹線、船、航空機やダムなどにおいては、これらの性能を予測するのに実物を用いての実験には膨大な費用や労力、時間を要し、また不可能な場合も多く、実物を縮小した模型実験が有用となってくる。

このような場合においては、模型と実物との間には形状および流れに対する姿勢が幾何学的に相似であることが必要である。さらに、模型と実物まわりの流れの速度などが運動学的に相似であることと、これらの物体に働く力などが力学的に相似であることが必要である。

このように、**模型と実物まわりの流れの現象が相似になることを相似則 (law of similarity) という。**

相似則が成立するためには、模型と実物の間で**幾何学的相似 (geometric similarity)**、**運動学的相似 (kinematic similarity)**、**力学的相似 (dynamic similarity)**が成立することが必要である。幾何学的相似においては、模型と実物の対応する長さの比が一定でなければならない。

運動学的相似においては、模型と実物の対応する点における速度の比と加速度の比が等しく、これらのベクトルの向きが同じでなければならない。

また、力学的相似においては、模型と実物の対応する点に作用する力の比がすべて等しくなければならない。

一般的に、実物と模型との間で幾何学的および運動学的に相似であるならば、模型と実物との間には力学的相似が成り立つ。

一般に、流体に作用する力には、慣性力、圧力による力(全圧力)、粘性による力、重力加速度による力、表面張力による力、および弾性力などがある。

よく使われている代表的な無次元数を次に示す。

### (1) レイノルズ数 (Reynolds number) $R_e$

$$R_e = \frac{\text{慣性力}}{\text{粘性力}} = \frac{F_i}{F_\mu} = \frac{\rho V^2 l^2}{\mu V l} = \frac{\rho V l}{\mu} = \frac{V l}{\nu} \quad (7.5)$$

この式は、レイノルズの相似則としてよく知られており、模型と実物との流れが力学的に相似であるためには、それぞれのレイノルズ数を等しくしなければならない。よく用いられる重要な無次元数である。

### (2) オイラー数 (Euler number) $E$

$$E = \frac{\text{慣性力}}{\text{全圧力}} = \frac{F_i}{F_p} = \frac{\rho V^2 l^2}{\rho l^2} = \frac{\rho V^2}{\rho} \quad (7.6)$$

オイラー数は、次の圧力係数の形でよく用いられる。

### (3) 圧力係数 (pressure coefficient) $C_p$

$$C_p = \frac{\text{全圧力}}{\text{慣性力}} = \frac{F_p}{F_i} = \frac{\rho l^2}{\rho V^2 l^2} = \frac{\Delta p}{\rho V^2 / 2} \quad (7.7)$$

流れの中に置かれた物体に作用する形状抵抗や管路内流れの抵抗を調べるときによく用いられる重要な無次元数である。

### (4) フルード数 (Froude number) $F_r$

$$F_r = \left( \frac{\text{慣性力}}{\text{重力の加速度による力}} \right)^{\frac{1}{2}} = \left( \frac{F_i}{F_g} \right)^{\frac{1}{2}} = \left( \frac{\rho V^2 l^2}{\rho l^3 g} \right)^{\frac{1}{2}} = \left( \frac{V}{\sqrt{gl}} \right) \quad (7.8)$$

船の造波抵抗や橋脚に作用する力などに用いられる。

## (5) マッハ数 (Mach number) $M$

$$M = \left( \frac{\text{慣性力}}{\text{弾性力}} \right)^{\frac{1}{2}} = \left( \frac{F_i}{F_K} \right)^{\frac{1}{2}} = \left( \frac{\rho V^2 l^2}{K l^2} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{V}{\sqrt{K/\rho}} = \frac{V}{a} \quad (7.9)$$

ここで、 $a = \sqrt{K/\rho}$  は音速\*であり、マッハ数は圧縮性を伴う高速流れの場合に用いられる重要な無次元数である。

## (6) ウェーバ数 (Weber number) $W_e$

$$W_e = \left( \frac{\text{慣性力}}{\text{表面張力による力}} \right)^{\frac{1}{2}} = \left( \frac{F_i}{F_\sigma} \right)^{\frac{1}{2}} = \left( \frac{\rho V^2 l^2}{\sigma l} \right)^{\frac{1}{2}} = V \sqrt{\frac{\rho l}{\sigma}} \quad (7.10)$$

ウェーバ数は、表面張力の影響の大きい液滴や気泡の生成などの問題に用いられる。

---

**[問題9.10]** 長さ $l_1=2$  cmの昆虫が、動粘度 $\nu_1=14 \times 10^{-6}$  m<sup>2</sup>/sの空气中を速度 $V_1=5$  m/sで飛んでいる。空気と昆虫との相対運動を調べるのに、長さ $l_2$ が昆虫の長さ $l_1$ の5倍の模型を用いて、動粘度 $\nu_2=110 \times 10^{-6}$  m<sup>2</sup>/sのオリーブ油の流れの中で模型実験をする場合、オリーブ油の速度 $V_2$ をいくらにしたらよいか。

**[解]** 実物と模型との流れが力学的に相似であるためには式(9.5)で示したように、それぞれのレイノルズ数を等しくしなければならない。したがって

$$\frac{V_1 \times l_1}{\nu_1} (\text{実物}) = \frac{V_2 \times l_2}{\nu_2} (\text{模型}) \quad (1)$$

となる必要がある。昆虫(実物)が空気中を飛ぶときのレイノルズ数 $R_{e1}$ は

$$R_{e1} = \frac{V_1 \times l_1}{\nu_1} = \frac{5 \times 0.02}{14 \times 10^{-6}} = 7142 \quad (2)$$

となるので、模型のレイノルズ数 $R_{e2}$ は

$$R_{e2} = \frac{V_2 \times l_2}{\nu_2} = 7142 \quad (3)$$

この式(3)に $\nu_2 = 110 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ ,  $l_2 = 5 \times 0.02 \text{ m}$ を代入すると

$$V_2 = \frac{7142 \times \nu_2}{l_2} = \frac{7142 \times 110 \times 10^{-6}}{5 \times 0.02} = 7.86 \text{ m/s}$$

となる。

すなわち、模型を7.86 m/sのオリーブ油の流れの中に置いたときの模型まわりの流れは、昆虫が実際に空気中を飛んでいるときの昆虫のまわりの流れと一致する。

## 7.2 次元解析

### 7.1.1 ロード・レイリー法

### 7.1.2 バッキンガムの $\pi$ 定理の方法

省略