回転運動　渦運動

（1）強制渦運動

図 3.11 に示すように、円筒容器内に液体を入れて鉛直中心軸まわりに一定の角速度 ω で回転させた場合、半径 r における円周方向の速度 v は、

$$v = r\omega \tag{3.17}$$

で表される。

このような運動を**強制渦運動**といい、この回転する流体の現象を**強制渦**（forced vortex）という。

この場合、半径 r における圧力 p は、次式で表される。

$$p = p_0 + \frac{1}{2}\rho r^2 \omega^2 \tag{3.18}$$

ここで、p_0は $r = 0$ における圧力、ρ は液体の密度である。（演習問題[3.24]を参照）

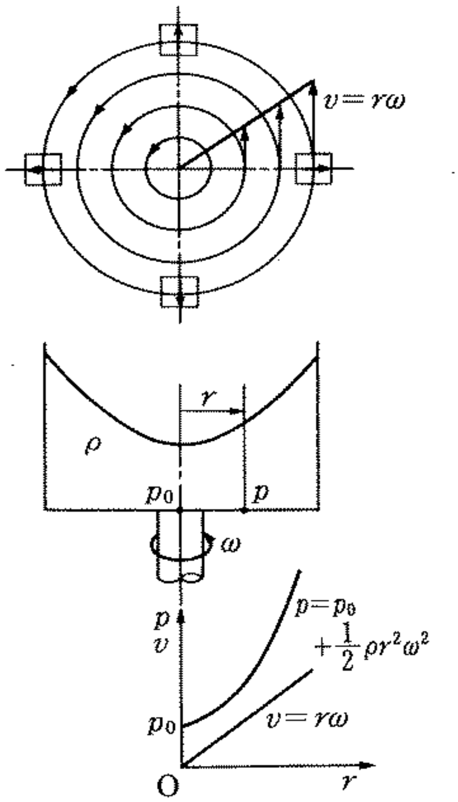

図 3.11　強制渦

（2）自由渦運動

図 3.12 に示すように、大きな水槽内の水をその底にあけた小さな孔から流出させた場合、水は旋回運動をする。この旋回運動は、中心からの距離 r に反比例する円周方向の速度 v で運動する流れとなり、次式で表される。

$$v = \frac{C}{r} \tag{3.19}$$

Cは、定数である。

このような運動を**自由渦運動**いい、この場合の流れを、**自由渦**（free vortex）という。

自由渦の半径 r における圧力 p は

$$p = p_0 - \frac{1}{2}\frac{\rho C^2}{r^2} \tag{3.20}$$

で表される。（演習問題[3.25]を参照）

圧力p_0は、$r=\infty$(無限遠方)における圧力である。また、r=0 の中心では理論的には $v=\ \infty$となるが､実際には､粘性の作用で渦の中心部分は自由渦運動ではなく､強制渦運動に近い流れとなる。

（3）組合せ渦運動

自然界に発生する渦運動を考えると､回転の中心からある程度離れた領域では周速度が中心からの距離 r に反比例する自由渦運動であるが、中心に近い領域では粘性作用が強く現れ、剛体的な回転運動である強制渦運動の形態をとるとみなすことができる場合が多い。

図 3.13 に示すように、半径 a より内側の部分が強制渦の流れ、それより外側の部分が自由渦の流れとなる。このような**強制渦**と**自由渦**を組合せた渦を**ランキンの組合せ渦**（Rankine's compound vortex）という。自然界に発生する台風などの渦運動は、このような形態をなすことが多い。

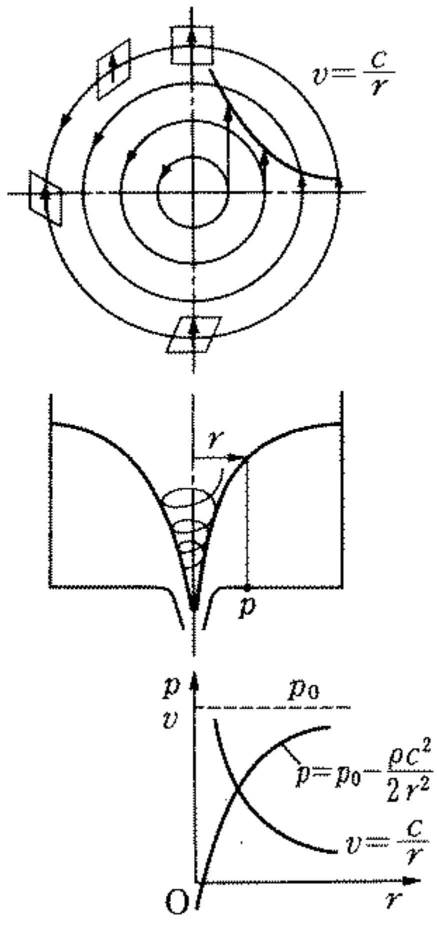

図 3.12 自由渦

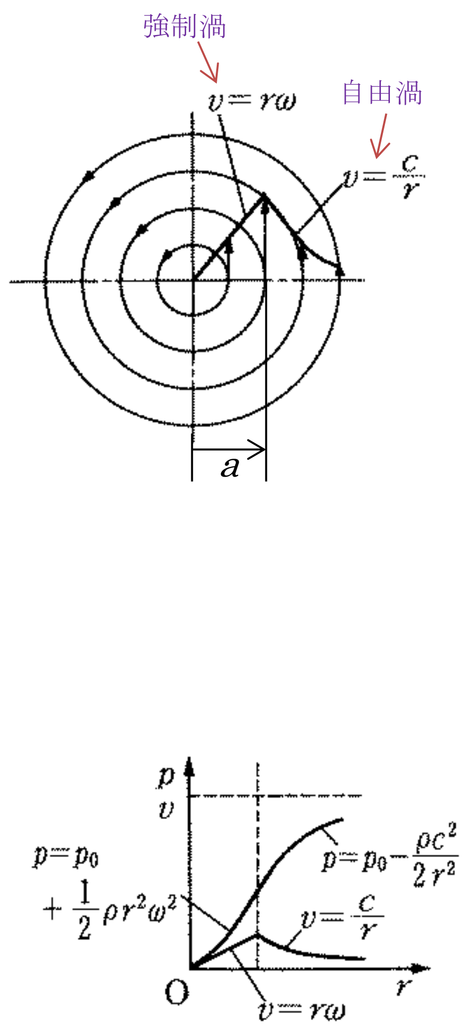

図 3.13 ランキンの組合せ渦

渦運動の演習問題

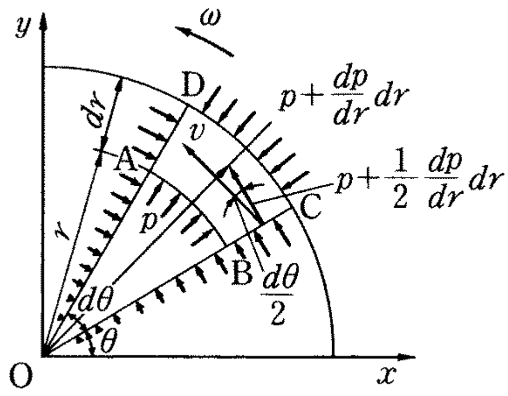

図 3.33

【3.24】 角速度 ω をもつ強制渦運動において，半径 r と圧力 p の関係を求めよ。

〔**解**〕 **図 3.33** のように，紙面に垂直な方向に奥行き 1 の単位長さを考え，点 O を中心として水平面内で回転する扇形 ABCDA の微小流体について，半径方向の力の釣合いを考える。AB 面に作用する圧力による力は

$$pr d\theta \tag{1}$$

CD 面に作用する圧力による力は

$$\left(p+\frac{dp}{dr}dr\right)(r+dr)d\theta \tag{2}$$

BC 面と AD 面に作用する圧力は，平均値をとると，各面共に $p+(1/2)(dp/dr)dr$ であるから，両面に作用する圧力による力の半径方向の分力は

$$2\left(p+\frac{1}{2}\frac{dp}{dr}dr\right)dr\cdot\sin\left(\frac{d\theta}{2}\right) \tag{3}$$

ここで

$$\sin\left(\frac{d\theta}{2}\right)\fallingdotseq\frac{d\theta}{2}$$

であるから

$$\left(p+\frac{1}{2}\frac{dp}{dr}dr\right)dr\cdot d\theta \tag{4}$$

扇形部分の体積は

$$\frac{1}{2}\{(r+dr)+r\}d\theta dr\times 1=\left(r+\frac{dr}{2}\right)drd\theta$$

であるので，扇形部分の質量 dm は

$$dm=\rho dr\left(r+\frac{dr}{2}\right)d\theta \tag{5}$$

扇形部分の半径方向の中心 $r+(dr/2)$ における求心力による加速度 α は

$$\alpha=-\left(r+\frac{dr}{2}\right)\omega^2=\frac{-\left\{\left(r+\frac{dr}{2}\right)\omega\right\}^2}{r+\frac{dr}{2}}=\frac{-v^2}{r+\frac{dr}{2}} \tag{6}$$

ここで，v は $r+(dr/2)$ における接線方向の速度である。

ゆえに，扇形部分の求心力は

$$dm\alpha=-\rho dr\left(r+\frac{dr}{2}\right)d\theta\frac{v^2}{r+\frac{dr}{2}}=-\rho v^2 drd\theta \tag{7}$$

式(1)，(2)，(4)の半径方向の圧力による力の和は，方向も考慮に入れ，高次の微小項を省略して整理すると

$$prd\theta-\left(p+\frac{dp}{dr}dr\right)(r+dr)d\theta+\left(p+\frac{1}{2}\frac{dp}{dr}dr\right)drd\theta \fallingdotseq -r\frac{dp}{dr}drd\theta \quad (8)$$

圧力による力と求心力との釣合いから式(8)＝式(7)である。これより

$$-r\frac{dp}{dr}drd\theta=-\rho v^2 drd\theta$$

が成り立つ。ゆえに，つぎの関係式を得る。

$$\frac{dp}{dr}=\rho\frac{v^2}{r} \quad (9)$$

ここで，扇形の半径方向の中心は $r+(dr/2)\fallingdotseq r$ と考えてよいから，接線方向の分速度は $v=(r+dr/2)\omega\fallingdotseq r\omega$ とおける。ゆえに

$$\frac{dp}{dr}=\rho r\omega^2 \quad (10)$$

式(10)を積分すると

$$p=\rho\omega^2\int rdr=\frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2+C \quad (11)$$

ここで渦の中心，$r=0$ における圧力を p_0 とすると

$$p=\frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2+p_0 \quad (12)$$

となり，半径と圧力との関係式が得られる。

【**3.25**】 流体の自由渦運動において，速度 v は距離 r に反比例する式(3.19)を誘導せよ。また，半径 r における圧力 p は式(3.20)で表せることを示せ。

〔**解**〕 同一水平面内で流体が自由渦運動している場合には，一つの流線についてベルヌーイの式が成り立つ。すなわち

$$p+\frac{\rho v^2}{2}=\text{const.}$$

この式を r 方向について微分すると

$$\frac{dp}{dr}+\rho v\frac{dv}{dr}=0 \tag{1}$$

つぎに，点Oまわりに回転している渦の基礎式は，式(9)で得られたように

$$\frac{dp}{dr}=\rho\frac{v^2}{r} \tag{2}$$

であり，これを式(1)に代入すると

$$\rho\frac{v^2}{r}+\rho v\frac{dv}{dr}=0$$

となり，これより

$$\frac{dv}{v}+\frac{dr}{r}=0 \tag{3}$$

を得る。上式を積分すると

$$\log v+\log r=C$$

$$vr=C \tag{4}$$

または

$$v=\frac{C}{r} \qquad (5)=\text{式}(3.19)$$

となり，v が r に反比例する式を得る。

つぎに，圧力については，自由渦の場合の流速は $v=C/r$ であるので，これを式(2)に代入すると

$$dp=\rho\frac{(C/r)^2}{r}dr=\rho\frac{C^2}{r^3}dr \tag{6}$$

となり，この式を積分すると

$$p=\int dp=\rho C^2\int\frac{1}{r^3}dr=-\frac{1}{2}\frac{\rho C^2}{r^2}+C_1 \tag{7}$$

$r=\infty$ における圧力を p_0 とすると，$C_1=p_0$ より

$$p=p_0-\frac{1}{2}\frac{\rho C^2}{r^2} \qquad (8)=\text{式}(3.20)$$