３．ベルヌーイの定理（動水力学）

3.1 ベルヌーイの定理

損失を考慮しない！理想流体と仮定、オイラー(Euler)の運動方程式より
①-②の流線上で(※一本の流線上で成立！) See図3.1

損失のない非粘性流体
理想流体に対して

$$\frac{V_1{}^2}{2}+\frac{p_1}{\rho}+gz_1=\frac{V_2{}^2}{2}+\frac{p_2}{\rho}+gz_2 \qquad (3.1)$$

一般的に

$$\frac{V^2}{2}+\frac{p}{\rho}+gz=H=\mathrm{const} \qquad (3.2)$$

運動エネルギー＋圧力エネルギー＋位置エネルギー＝一定
エネルギー保存則を表している。

(3.1)式を**ベルヌーイの定理** Bernoulli's theorem と呼ぶ。

$$\frac{\rho V^2}{2}+p+\rho gz=p_t=\mathrm{const} \qquad (3.3)$$

動圧＝全圧－静圧(水平位置;位置エネルギーを考慮しない。①-②が水平の場合) ピトー管で速度を求める場合！See 図3.4

$$\boxed{\frac{\rho V^2}{2}=p_t-p} \;\rightarrow\; \boxed{\text{動圧＝全圧－静圧}} \qquad (3.4)$$

or

$$\frac{V_1{}^2}{2g}+\frac{p_1}{\rho g}+z_1=\frac{V_2{}^2}{2g}+\frac{p_2}{\rho g}+z_2 \qquad (3.5)$$

一般的に

$$\boxed{\frac{V^2}{2g}+\frac{p}{\rho g}+z=\mathrm{const}\quad[\mathrm{m}]} \qquad (3.6)$$

速度水頭＋圧力水頭＋位置水頭＝一定

連続の式は、

$$\boxed{Q=AV} \qquad (3.7)$$

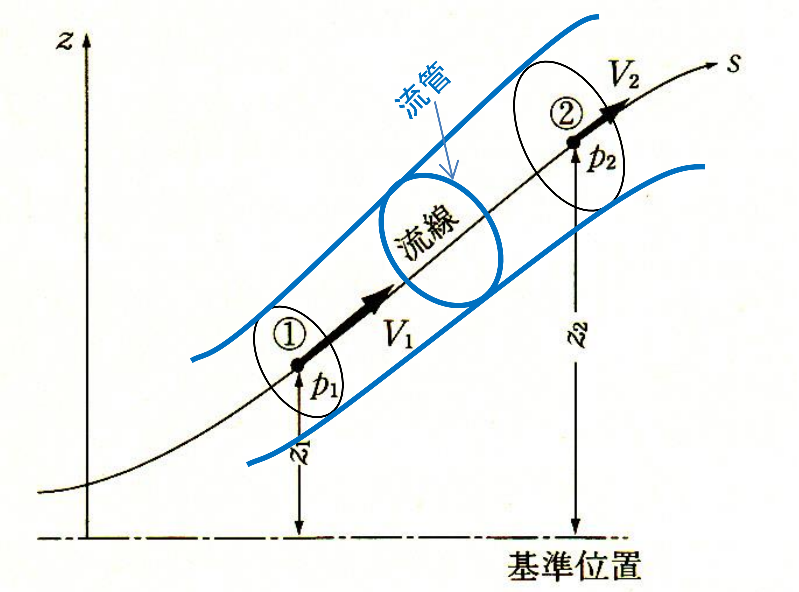

図3. 1　ベルヌーイの定理（オイラーの運動方程式）

3.2 トリチェリーの定理

損失のない非粘性流体　理想流体に対して

＜比較的に小さな孔から流出する場合＞

水槽側壁の小孔（オリフィス）からの流出速度V_2は、①-②間でベルヌーイの定理を適用すると

$$\cancel{\frac{V_1{}^2}{2g}}+\cancel{\frac{p_1}{\rho g}}+z_1=\frac{V_2{}^2}{2g}+\cancel{\frac{p_2}{\rho g}}+z_2 \qquad (3.8)$$

$V_1 \cong 0,\ z_1-z_2=H,\ p_1=p_2=p_a$（大気圧）

V_1：近寄り速度≒0、面積比：50倍以上

$$\boxed{\therefore\ V_2=\sqrt{2gH}} \qquad (3.9)$$

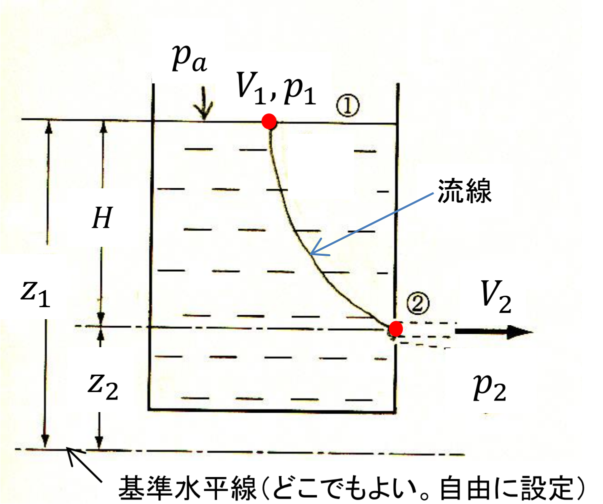

図3.2 小孔からの流出速度

実在流体 粘性流体に対して

実在流体に対しては、次の式を用いる。

$$V_2 = c_v\sqrt{2gH} \tag{3.10}$$

c_v は、速度係数　通常は、0.93～0.98である。

小孔(オリフィス)の面積をa　とすると、噴流の断面積a'は

$$a' = c_c\ a \tag{3.11}$$

c_c は、収縮係数　通常は、0.61～0.66である。

小孔(オリフィス)から流出する流量Qは、次式で表される。

$$Q = a' c_v\sqrt{2gH} = ca\sqrt{2gH} \tag{3.12}$$

c は、流量係数であり、速度係数と収縮係数の積で表される。

$$c = c_v c_c \tag{3.13}$$

実在流体 粘性流体に対して

小孔が比較的大きい場合。

小孔が比較的大きい場合で、液面低下が無視できない場合。
水槽の断面積をA、小孔の面積をaとする。
図において、液面の位置がzになったとき、その位置で微小時間dtの間に液面が微小高さdzだけ低下したとする。
水槽内の液体減少量は、小孔からの流出量に等しいから、式(3.12)より流量係数をcとすると

$$-Adz = ca\sqrt{2gz}dt$$

となり、変形すると(負号は、z の変化が常に負であるため)

$$dt = -\frac{A}{ca}\frac{dz}{\sqrt{2gz}} \qquad (3.14)$$

H の高さまであった流体がz の高さまで減少するのに要する時間 t は

$$t = -\frac{A}{ca\sqrt{2g}}\int_H^z \frac{dz}{\sqrt{z}} = \frac{A}{ca}\sqrt{\frac{2}{g}}\left(\sqrt{H} - \sqrt{Z}\right) \qquad (3.15)$$

すべての流体が流出するのに必要な時間 T は、上式で $z = 0$ として

$$T = \frac{A}{ca}\sqrt{\frac{2H}{g}} \qquad (3.16)$$

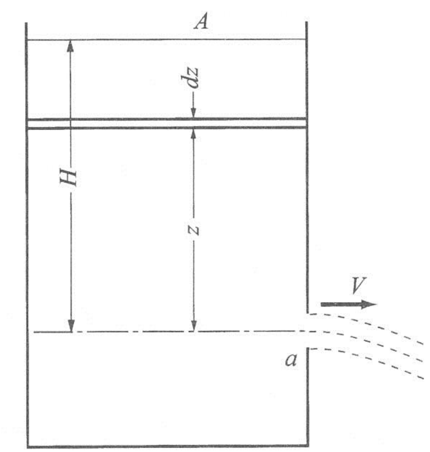

図 4.5 液面が低下する場合の流出

3.3　ベンチュリー管

＜流量測定＞

管路の一部を絞り、前後の圧力差から管路内を流れる流量を求める。

$$Q = A_2 V_2 = \frac{A_2}{\sqrt{1-(A_2/A_1)^2}} \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho}} \tag{3.17}$$

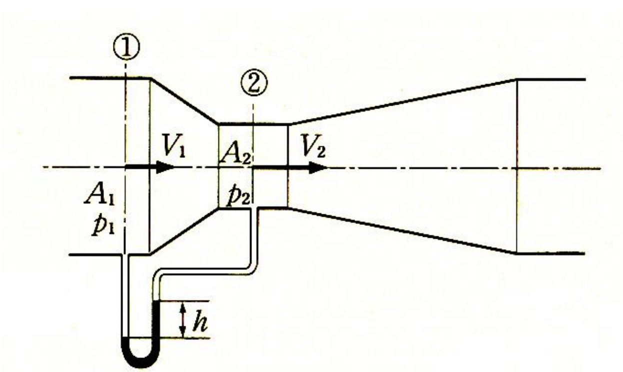

図3.3　ベンチュリー管

3.4 ピトー管

＜亜音速の速度測定＞

全圧と静圧測定より、速度を求める。ベルヌーイの定理より

$$\frac{V^2}{2g}+\frac{p_s}{\rho g}+z=\frac{1}{2g}{V_0}^2+\frac{p_t}{\rho g}+z_0 \qquad (3.18)$$

$$\frac{1}{2}\rho V^2+p_s+\rho\cancel{g}z=\frac{1}{2}\rho\cancel{V_0}^2+p_t+\rho\cancel{g}z_0$$

今、$V_0=0$ （よどみ点では、速度0），$z=z_0$

$$\frac{1}{2}\rho V^2=p_t-p_s \qquad (3.19)$$

動圧＝全圧－静圧

$$\therefore\ V=\sqrt{\frac{2(p_t-p_s)}{\rho}} \qquad (3.20)$$

$$\boxed{V=k\sqrt{\frac{2(p_t-p_s)}{\rho}}} \qquad (3.21)$$

k ： ピトー管係数

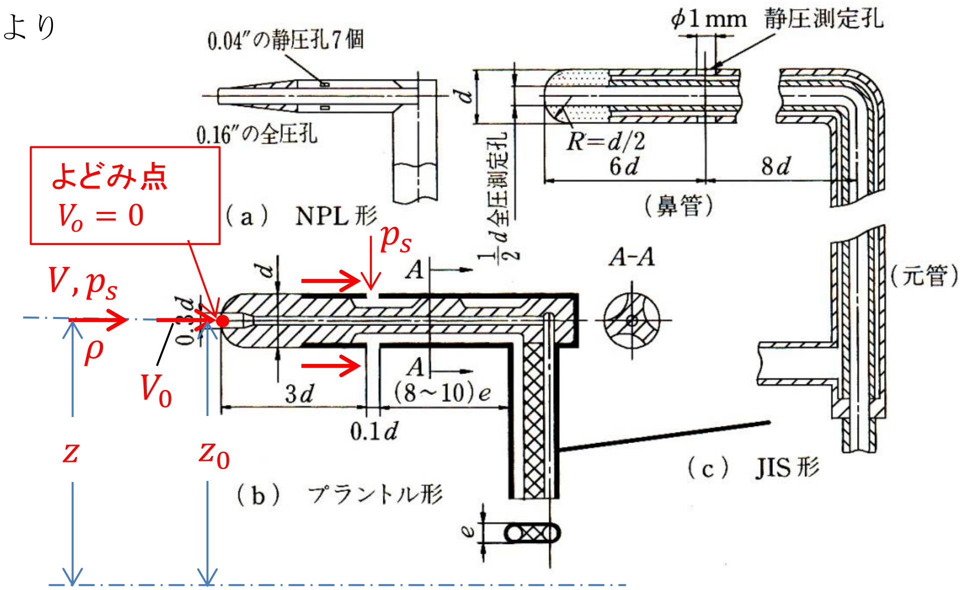

図3.4 標準ピトー管

(例題)ピトー管を用いて20℃の空気の流れを測定。動圧が30.5kPa，静圧が101.3kPaである。(a)非圧縮性，(b)圧縮性の場合の空気の速度を求めよ。ピトー管係数 k = 0.98，密度 ρ =1.204 kg/m³ ，ガス定数R = 287.03 J/(kg･K)とする。

(解答)

(a)非圧縮性の場合　　速度は、$V=k\sqrt{\frac{2(p_t-p_s)}{\rho}}=0.98\sqrt{\frac{2}{1.204}\times 30.5\times 10^3}=220.6\ \mathrm{m/s}$

(b)圧縮性の場合　　音速は：$a=\sqrt{\frac{\kappa p_1}{\rho}}==\sqrt{\frac{1.4\times 101.3\times 10^3}{1.204}}=343.2\ \mathrm{m/s}$　∴ マッハ数は：$M=\frac{V}{a}=\frac{220.6}{343.2}=0.643$　したがって、流れは、亜音速である。

空気の全温度がわかれば、次式で速度は求められる。　全温度$T_1=273.15+20=293.15\ \mathrm{K}$ だから

$$V=M\sqrt{\kappa R T_1}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{\kappa-1}{2}M^2}}=0.643\times\sqrt{1.4\times 287.03\times 293.15}\times\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1.4-1}{2}0.643^2}}=212.1\ \mathrm{m/s}$$