平面壁に及ぼす流体の力

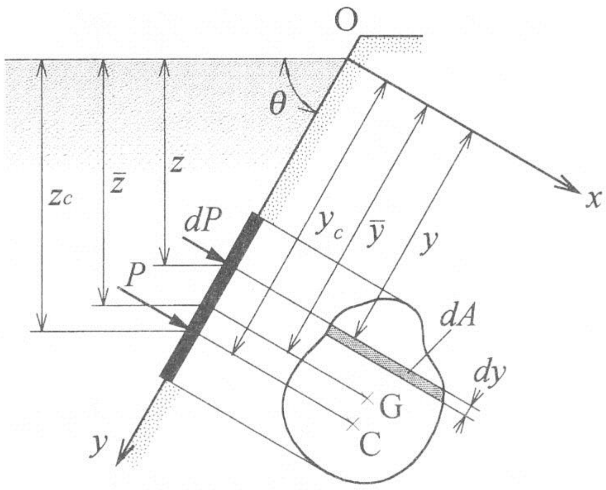


図 2.13　平面壁に及ぼす全圧力

平面壁に及ぼす力の積算は，ダムなどの壁面の強度設計に必要である．図 2.13 に示すように，静止液体中に平面壁が角度 θ で斜めに取り付けられているときの平面壁に及ぼす全圧力とその作用点を考える．

液面と壁との交線を Ox 軸，これに直角に Oy 軸をとる．深さ z における平面壁の微小面積 dA に及ぼす全圧力 dP は

$$dP = pdA = \rho gzdA$$

$$\therefore \quad P = \rho g \int zdA = \rho g \sin\theta \int ydA \tag{2.17}$$

幾何学的な重心の定義より

$$\boxed{\int ydA = \bar{y}A} \tag{2.18}$$

したがって，平面壁に及ぼす全圧力は

$$\therefore \quad \boxed{P = \rho g \sin\theta \int ydA = \rho g \sin\theta \cdot \bar{y}A = \rho g \bar{z}A} \tag{2.19}$$

となる．ここに，$\bar{z}$ は液面から重心(図心) G までの距離である．したがって，平面壁に作用する液体の全圧力は，重心での圧力と平面壁の面積の積で求められる．

次に，この全圧力の作用点である**圧力中心**(center of pressure)の位置 C を求める．微小全圧力 dP による Ox 軸まわりのモーメント ydP を平面壁全体にわたって積分した $\int ydP$ と全圧力 P のモーメント y_cP は等しいので

$$y_cP = \int ydP \tag{2.20}$$

$$y_c = \frac{\int ydP}{P}$$

$$\therefore \quad y_c = \frac{\rho g \sin\theta \int y^2dA}{\rho g \sin\theta \int ydA} = \frac{\int y^2dA}{\int ydA} \tag{2.21}$$

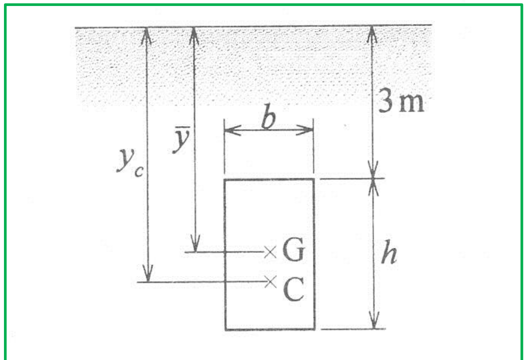
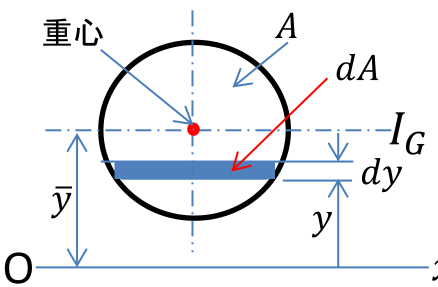


図 2.14　垂直仕切水門に作用する力



重心の定義

ここで，$\int y dA = \bar{y}A$，また，$\int y^2 dA$ は平面壁の Ox 軸まわりの**慣性モーメント**（断面二次モーメント，moment of inertia, or second moment of area）である．重心 G を通り Ox 軸に平行な軸まわりの慣性モーメントを I_G とすると

$$\int y^2 dA = I_G + A\bar{y}^2 \tag{2.22}$$

となる．また，重心を通り Ox 軸に平行な直線に関する平面壁の**回転半径**（radius of gyration）を k_G とすると $I_G = k_G{}^2 A$ となる．したがって，圧力中心の位置 C の Oy 軸に沿った水面からの距離 y_C は

$$\boxed{y_C = \frac{I_G + A\bar{y}^2}{\bar{y}A} = \bar{y} + \frac{I_G}{\bar{y}A} = \bar{y} + \frac{k_G{}^2}{\bar{y}}} \tag{2.23}$$

となる

例題 2.7　図 2.14 に示す幅 $b = 1.5$ m，高さ $h = 3$ m の長方形の垂直仕切水門に作用する全圧力 P と圧力中心の位置 y_C を求めよ．

解　いま，式 (2.19) において，$\sin\theta = \sin 90° = 1$，$\bar{y} = \bar{z}$ となるから，全圧力 P は

$$P = \rho g \bar{z} A = 1000 \times 9.8 \times 4.5 \times 1.5 \times 3$$
$$= 198450 \text{ kg·m/s}^2 = 198.45 \text{ kN}$$

圧力中心の位置 y_C は，式 (2.23) において，長方形の重心 G を通る慣性モーメント I_G は，$I_G = bh^3/12$，面積 $A = bh$，また，$y_C = z_C$ であるから

$$y_C = z_C = \bar{y} + \frac{I_G}{\bar{y}A} = \bar{y} + \frac{bh^3/12}{\bar{y}bh} = \bar{y} + \frac{h^2}{12\bar{y}}$$
$$= 4.5 + \frac{3^2}{12 \times 4.5} = 4.67 \text{ m}$$

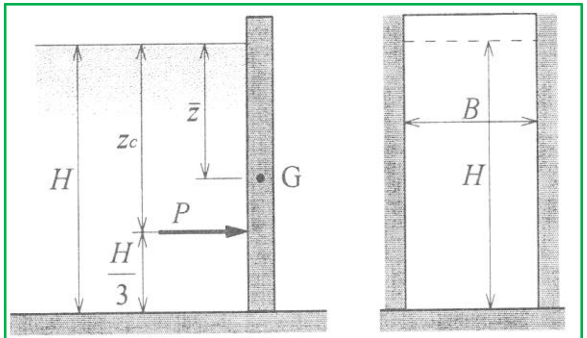
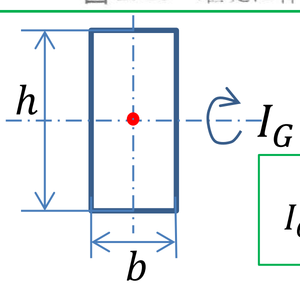


図 2.15　堰堤に作用する力

例題 2.8　図 2.15 に示す水深 H，幅 B の垂直な堰堤に作用する全圧力 P は，$P = \rho g \times (H^2B/2)$，また，圧力中心の位置は，底面から $H/3$ にあることを証明せよ．

解　全圧力 P は式 (2.19) において，$\bar{z} = H/2$，$A = H \times B$ であるから

$$P = \rho g \bar{z} A = \rho g \times \frac{H}{2} \times H \times B = \rho g \frac{H^2 B}{2}$$



$$I_G = \frac{bh^3}{12}$$

また，圧力中心の位置 y_C は，式 (2.23) において，$y_C = z_C$，$\bar{y} = \bar{z}$，また，重心 G を通る慣性モーメント I_G は，$I_G = BH^3/12$ であるから

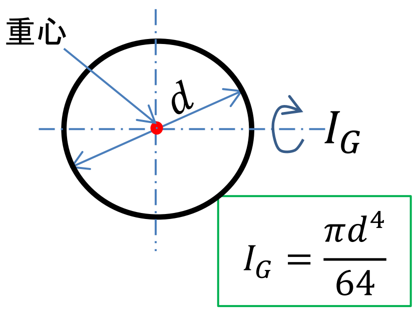
$$y_C = z_C = \bar{y} + \frac{I_G}{\bar{y}A} = \frac{H}{2} + \frac{BH^3/12}{(H/2)\times H\times B} = \frac{2H}{3}$$

したがって，圧力の中心の位置は，底面から

$$H - \frac{2H}{3} = \frac{H}{3}$$

の位置となる．証明終わり．

例題 2.9 図 2.16 に示すように，中心軸のまわりに回転できる円形弁で，内径 80 cm の水平管を流れる水量を調整している．円形弁の中心と水面との距離 $\bar{z} = 2.4$ m のとき，円形弁に作用する全圧力 P と圧力の中心 z_C を求めよ．



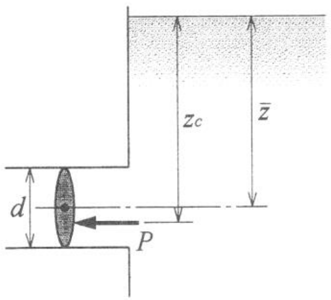


図 2.16 円形弁に作用する力

解 式 (2.19) より，全圧力 P は

$$P = \rho g \bar{z} A = 1000 \times 9.8 \times 2.4 \times \frac{\pi \times 0.8^2}{4} = 11822\ \mathrm{kg}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 11822\ \mathrm{N}$$

式 (2.23) において，円形の場合の重心 G を通る慣性モーメント I_G は，$I_G = \pi d^4/64$，$A = \pi d^2/4$，また，$y_C = z_C$ であるから

$$y_C = z_C = \bar{y} + \frac{I_G}{\bar{y}A} = \bar{y} + \frac{\pi d^4/64}{\bar{y}\cdot\pi d^2/4} = \bar{y} + \frac{d^2}{16\bar{y}}$$

$$= 2.4 + \frac{0.8^2}{16 \times 2.4} = 2.42\ \mathrm{m}$$