

# 流体の力学 基礎編

## 基礎と演習 流れの力学

### 第 8 章 運動量の法則

\*\*\*\*\*

### 第 8 章 運動量の法則

### 第8章 演習問題

**【問題 8.18】** 図 8.23 に示すように、水量  $Q=30 \text{ l/s}$  の噴流が鉛直方向から  $45^\circ$  曲げられた固定平板に速度  $V = 30\text{m/s}$  で衝突し、上下に分岐して流れている。噴流が固定平板に及ぼす  $x, y$  方向の力  $F_x, F_y$  およびその合力  $F$  を求めよ。また、合力  $F$  が水平軸となす角度  $\beta$  を求めよ。

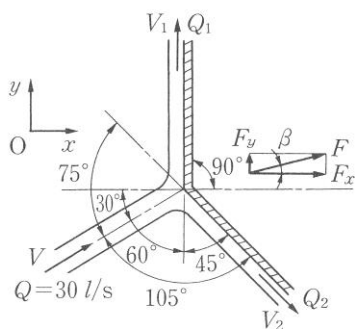


図 8.23

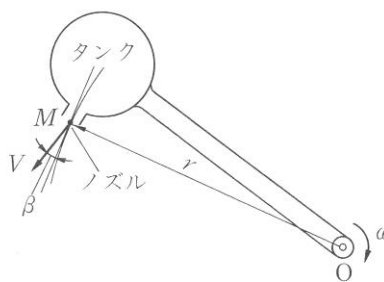


図 8.24

**【解】** 流量  $Q$  を  $Q_1$  と  $Q_2$  に配分するには、(問題 8.8) と同様に平板に平行な流れの運動量を考えて求める。平板の方向に外力は作用しないので  
衝突前の運動量 = 衝突後の運動量

と考えられる。衝突前の噴流の鉛直方向の運動量は  $\rho QV\cos 60^\circ = \rho QV\sin 30^\circ$  であり、 $45^\circ$  曲げられた方向の運動量は  $\rho QV\cos 105^\circ = -\rho QV\cos 75^\circ$  である。また、衝突後の噴流のそれぞれの平板方向の運動量は方向を考えて、 $\rho Q_1V_1$  および  $-\rho Q_2V_2$  であるから式(1)を得る。

$$\rho(QV\sin 30^\circ - QV\cos 75^\circ) = \rho Q_1V_1 - \rho Q_2V_2 \quad (1)$$

平板に沿う方向に流れの損失がないものとする、 $V = V_1 = V_2$  であり、 $\rho =$ 一定であるから

$$(Q\sin 30^\circ - Q\cos 75^\circ) = Q_1 - Q_2$$

ゆえに

$$0.24Q = Q_1 - Q_2 \quad (2)$$

となる。一方

$$Q = Q_1 + Q_2 \quad (3)$$

の関係式が成立つから、式(2),(3)より  $Q_1$ ,  $Q_2$  は次式で表され、 $Q = 30 \text{ l/s} = 30 \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$  を代入すると

$$Q_1 = 0.62Q = 0.62 \times 30 \times 10^{-3} = 18.6 \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$$

$$Q_2 = 0.38Q = 0.38 \times 30 \times 10^{-3} = 11.4 \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$$

となる。次に、運動量の法則より  $x$  方向の力  $F_x$  は、鉛直平板の  $x$  方向の運動量は 0 であるから

$$\begin{aligned} F_x &= \rho(QV\cos 30^\circ - Q_2V_2\cos 45^\circ) \\ &= 1000 \times (30 \times 10^{-3} \times 30 \times \cos 30^\circ - 11.4 \times 10^{-3} \times 30 \times \cos 45^\circ) = 537.6 \text{ N} \end{aligned}$$

となり、 $y$  方向の力  $F_y$  は

$$\begin{aligned} F_y &= \rho \{QV\sin 30^\circ - (Q_1V_1 - Q_2V_2\sin 45^\circ)\} \\ &= \rho(QV\sin 30^\circ - Q_1V_1 + Q_2V_2\sin 45^\circ) \\ &= 1000 \times (30 \times 10^{-3} \times 30 \times \sin 30^\circ - 18.6 \times 10^{-3} \times 30 \\ &\quad + 11.4 \times 10^{-3} \times 30 \times \sin 45^\circ) \\ &= 1338 \text{ N} \end{aligned}$$

となる。ゆえに合力  $F$  は

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{537.6^2 + 133.8^2} = 554 \text{ N}$$

となり，方向  $\beta$  は

$$\beta = \tan^{-1}(F_y/F_x) = \tan^{-1}(133.8/537.6) = 14^\circ$$

となる。

**【問題 8.19】** 図 8.24 に示すように，タンクのノズルから噴流が噴出し，O 点まわりに回転できるようになっている。噴流の反動力，すなわちタンクの受ける推力  $F_t$  の作用点は，ノズル出口部 M 点にある。噴流の方向は円周方向と角度  $\beta$  をなし，O 点と M 点の距離を  $r$ ，ノズルから噴出する速度を  $V$ ，流量を  $Q$ ，角速度を  $\omega$  とするとき，タンクに生ずる動力  $L$  求めよ。

**【解】** 噴流によってタンクの受ける推力  $F_t$  は， $V$ ， $Q$  が常に一定に保たれているとすると，式(8.35)より

$$F_t = \rho QV$$

$F_t$  の周方向の成分は  $F_t \cos \beta$  であるから，モーメント  $M$  は次式で求まる。

$$M = F_t r \cos \beta = \rho QVr \cos \beta \quad (8.55)$$

次に，タンクに生じる動力  $L$  は，式(8.46)に示したように，モーメント  $M$  と角速度  $\omega$  との積で求まるから

$$L = \omega \cdot M = \omega \rho QVr \cos \beta \quad (8.56)$$

となる。

**【問題 8.20】** 図 8.25 に示すような曲面板に水が衝突し、曲面板はO点まわりに回転できるように支持されている。曲面板が回転できないようにするには、O点にいくらのモーメントを加えたらよいか。ただし、水の流量を 40 l/s, 速度を 35 m/s,  $y_1=30$  cm,  $y_2=100$  cm とする。

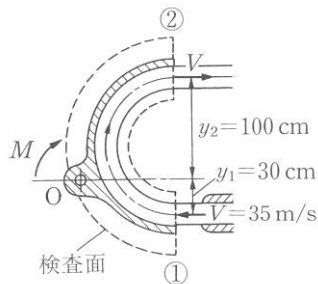


図 8.25

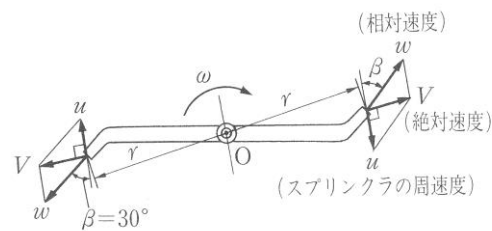


図 8.26

**【解】** 検査面①に流入する単位時間当りの水の角運動量  $T_1$  は、式(8.43)より

$$T_1 = r \cdot F_\theta = \rho QV \cdot y_1 \quad (1)$$

同様に、検査面②において流出する単位時間当りの水の角運動量  $T_2$  は

$$T_2 = r \cdot F_\theta = \rho QV \cdot y_2 \quad (2)$$

となる。

検査面内部の流体が受けるモーメント  $M$  は、その検査面を通して単位時間に流出する角運動量  $T_2$  と流入する角運動量  $T_1$  との差で表される。すなわち、式(1)と(2)の差で表されるから

$$M = T_2 - T_1 = \rho QV (y_2 - y_1) \quad (3)$$

となる。したがって、曲面板が回転できないようにするためにO点に加えるモーメント  $M$  は、式(3)に  $\rho=1000$  kg/m<sup>3</sup>,  $Q=40 \times 10^{-3}$  m<sup>3</sup>/s,  $V=35$  m/s,  $y_1=0.3$  m,  $y_2=1$  m を代入すると求まり

$$M = T_2 - T_1 = \rho QV (y_2 - y_1) = 1000 \times 0.04 \times 35 \times (1 - 0.3) = 980 \text{ N} \cdot \text{m}$$

となり、したがって、980 N·m 以上のモーメントを加えるとよいことになる。

**【問題 8.21】** 図 8.26 に示すようなスプリンクラで流量  $Q = 300 \text{ l/min}$  の水を、直径  $d = 12 \text{ mm}$  のノズルから噴出させて散水している。噴流がスプリンクラに及ぼす接線方向の力  $F_t$ 、毎分の回転速度  $n$ 、およびアームの回転を止めるのに必要なトルク  $T$  を求めよ。ただし、ノズルの角度  $\beta = 30^\circ$ 、スプリンクラの回転半径  $r = 50 \text{ cm}$  とし、回転に伴う摩擦損失は無視する。

**【解】** 一つのノズルからの噴流の反作用によってスプリンクラに及ぼす接線方向の力  $F_t$  は、運動量の法則を適用すれば求まる。一つのノズルから流出する噴流の流量は  $Q/2$  であり、ノズルの断面積を  $A$  とすると、ノズルから噴出する水の相対速度は  $w = (Q/2)/A$  となる。スプリンクラ流入時の接線方向の運動量は 0 であるから、接線方向の力  $F_t$  は運動量の法則より

$$F_t = \rho(Q/2) (w \cos \beta - 0) = \rho(Q/2) w \cos \beta = \rho A w^2 \cos \beta \quad (8.57)$$

となる。スプリンクラの二つのノズルから噴出される噴流によるトルク  $T$  は、回転半径を  $r$  とすると

$$T = 2F_t \cdot r \quad (1)$$

より求められる。そこで、まず相対速度  $w$  を求める。 $Q = 300 \text{ l/min} = 300 \times 10^{-3} / 60 \text{ m}^3/\text{s}$ 、 $A = (\pi/4) \times 0.012^2 \text{ m}^2$  を次式に代入すると

$$w = \frac{Q/2}{A} = \frac{\frac{300}{60} \times 10^{-3} \times \frac{1}{2}}{(\pi/4) \times 0.012^2} = 22.1 \text{ m/s} \quad (2)$$

したがって、接線方向の力  $F_t$  は、式(8.57)に  $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ 、 $A = (\pi/4) \times 0.012^2 \text{ m}^2$ 、 $w = 22.1 \text{ m/s}$ 、 $\beta = 30^\circ$  を代入すると求まり

$$\begin{aligned} F_t &= \rho A w^2 \cos \beta \\ &= 1000 \times (\pi/4) \times 0.012^2 \times 22.1^2 \times \cos 30^\circ = 47.84 \text{ N} \end{aligned} \quad (3)$$

となる。ゆえに、スプリンクラの回転を止めるに必要なトルク  $T$  は、式(1)より求まり、 $r = 0.5 \text{ m}$  であるから

$$T = 2F_t \cdot r = 2 \times 47.84 \times 0.5 = 47.84 \text{ N} \cdot \text{m} \quad (4)$$

となる。

次に、角運動量の法則を用いて、スプリンクラの毎分回転数  $n$  を求める。ス

プリンクラに流入するときの水の角運動量は0であり、ノズルから流出するまでに生じる管内摩擦損失や回転に伴う抵抗損失は無視するから、これらの外部からの力によるトルクは0である。ゆえに、スプリンクラが定常な回転に達したときのノズルから流出する水の角運動量は0でなければならない。したがって、角運動量の法則を適用すれば次式が成り立つ。

$$T = 2F_t \cdot r = 2\rho(Q/2)(w\cos\beta - u)r = \rho Q(w\cos\beta - u)r = 0 \quad (8.58)$$

ここで、回転角速度を $\omega$ 、半径 $r$ における周速度を $u$ とすると、 $u = \omega r$ の関係があるから

$$w\cos\beta - u = w\cos\beta - \omega r = 0 \quad (5)$$

これより、 $\omega$ は

$$\omega = \frac{w\cos\beta}{r} = \frac{22.1 \times \cos 30^\circ}{0.5} = 38.28 \text{ rad/s} \quad (6)$$

となる。ゆえに、毎分回転数 $n$ は、 $2\pi rn / 60 = r\omega$ より

$$n = \frac{60}{2\pi} \omega = \frac{60}{2\pi} \times 38.28 = 366 \text{ rpm} \quad (7)$$

となる。

**【問題 8.22】** 図 8.27 に示すように、検査面①において長方形の噴流が、検査面②でそれと同じ幅をもつ速度 $u$ で移動している溝形の板に当たって方向を変え、上下に分かれて流出している。噴流が溝形の板に及ぼす力 $F$ は

$$\begin{aligned} F &= \rho Q(V_1 \cos\alpha_1 - V_2 \cos\alpha_2) \\ &= \rho Q \left( V_1 \cos\alpha_1 - u - \cos\beta_2 \sqrt{u^2 + V_1^2 - 2uV_1 \cos\alpha_1} \right) \end{aligned} \quad (8.59)$$

動力 $L$ は

$$\begin{aligned} L &= F \cdot u = \rho Q u (V_1 \cos\alpha_1 - V_2 \cos\alpha_2) \\ &= \rho Q u \left( V_1 \cos\alpha_1 - u - \cos\beta_2 \sqrt{u^2 + V_1^2 - 2uV_1 \cos\alpha_1} \right) \end{aligned} \quad (8.60)$$

あるいは

$$L = \frac{\rho Q}{2} (V_1^2 - V_2^2) \quad (8.61)$$

また，噴流が動いている板に作用する効率  $\eta$  は

$$\eta = 1 - \frac{V_2^2}{V_1^2} \quad (8.62)$$

で表されることを証明せよ。ただし， $Q$ は板に沿って流れる噴流の流量， $u$ は板の速度， $V_1$ は噴流の最初の絶対速度， $\alpha_1$ は $u$ と $V_1$ とのなす角度， $\beta_2$ は $u$ と板の方向のなす角度である。流れは平面的であり，重力は作用しないものとする。

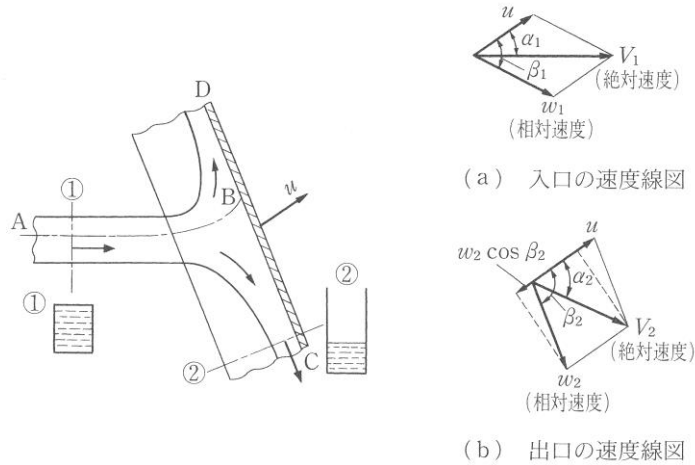


図 8.27

**【解】** 流れは二次元流れであり，流れは分岐流線  $AB$  で上下に分かれるが，簡単のために  $ABC$  の片方の領域の流れだけを考えることにする。図(a)，(b)における  $w_1$ ， $w_2$  は，それぞれ検査面①，②における噴流の板に対する相対速度であり， $w_2$  の方向は，板に平行であるが，大きさは等しく  $w_1 = w_2$  となる。 $u$  方向における絶対速度の変化は

$$V_1 \cos \alpha_1 - V_2 \cos \alpha_2 \quad (1)$$

図(b)の速度線図より

$$u = V_2 \cos \alpha_2 - w_2 \cos \beta_2$$

$$\therefore V_2 \cos \alpha_2 = u + w_2 \cos \beta_2 \quad (2)$$

となる。ここで  $\cos \beta_2$  は， $90^\circ < \beta_2 < 180^\circ$  の間にあるから， $\cos \beta_2 < 0$  で負の値

となる。式(2)を(1)に代入して

$$V_1 \cos \alpha_1 - V_2 \cos \alpha_2 = V_1 \cos \alpha_1 - (u + w_2 \cos \beta_2) \quad (3)$$

となる。図(a)の速度線図より、幾何学的に

$$w_1^2 = u^2 + V_1^2 - 2uV_1 \cos \alpha_1 \quad (4)$$

が成立するから

$$w_1 = \sqrt{u^2 + V_1^2 - 2uV_1 \cos \alpha_1} \quad (5)$$

いま、 $w_1 = w_2$ であるから式(3)の絶対速度の変化は、式(5)を式(3)に代入して

$$\begin{aligned} V_1 \cos \alpha_1 - V_2 \cos \alpha_2 &= V_1 \cos \alpha_1 - (u + w_2 \cos \beta_2) \\ &= V_1 \cos \alpha_1 - u - \cos \beta_2 \sqrt{u^2 + V_1^2 - 2uV_1 \cos \alpha_1} \end{aligned} \quad (6)$$

となる。したがって、噴流が板に及ぶす力  $F$  は、単位時間当たりの運動量の変化に等しいので

$$\begin{aligned} F &= \rho Q (V_1 \cos \alpha_1 - V_2 \cos \alpha_2) \\ &= \rho Q \left( V_1 \cos \alpha_1 - u - \cos \beta_2 \sqrt{u^2 + V_1^2 - 2uV_1 \cos \alpha_1} \right) \end{aligned} \quad (7)$$

となり、式(8.59)と一致する。

次に、噴流が板になした仕事、つまり動力は

$$L = F \cdot u \quad (8)$$

で表されるから、式(7)、(8)より

$$\begin{aligned} L &= \rho Q u (V_1 \cos \alpha_1 - V_2 \cos \alpha_2) \\ &= \rho Q u \left( V_1 \cos \alpha_1 - u - \cos \beta_2 \sqrt{u^2 + V_1^2 - 2uV_1 \cos \alpha_1} \right) \end{aligned} \quad (9)$$

となり、式(8.60)と一致する。

次に、図(b)の速度線図において、幾何学的に

$$w_2^2 = u^2 + V_2^2 - 2uV_2 \cos \alpha_2 \quad (10)$$

であるから、式(4)と(10)を整理すると、それぞれ

$$V_1 \cos \alpha_1 = \frac{u^2 + V_1^2 - w_1^2}{2u}$$

$$V_2 \cos \alpha_2 = \frac{u^2 + V_2^2 - w_2^2}{2u}$$

となるから、これらを式(9)に代入すると



$$\begin{aligned}
L &= \rho Q u (V_1 \cos \alpha_1 - V_2 \cos \alpha_2) \\
&= \rho Q \left( \frac{u^2 + V_1^2 - w_1^2}{2} - \frac{u^2 + V_2^2 - w_2^2}{2} \right) \\
&= \frac{\rho Q (V_1^2 - w_1^2 - V_2^2 + w_2^2)}{2}
\end{aligned} \tag{11}$$

なお,  $w_1 = w_2$  であるから, 式(11)は

$$L = \frac{\rho Q (V_1^2 - V_2^2)}{2} \tag{12}$$

となり, 式(8.61)と一致する。

また, 噴流の有する運動エネルギー  $L_t$  は, (質量)×(速度)<sup>2</sup>/2 であり, 質量は  $\rho Q$  となり, この場合の質量は噴流が単位時間に通過する質量を表している。したがって, 運動エネルギー  $L_t$  は, 噴流の単位時間当たりのエネルギー, すなわち動力を意味するので

$$L_t = \frac{1}{2} \rho Q V_1^2 \tag{13}$$

となる。したがって, 噴流が板に作用する効率  $\eta$  は式(12), (13)より

$$\eta = \frac{L}{L_t} = 1 - \frac{V_2^2}{V_1^2} \tag{14}$$

となり, 式(8.62)が導かれる。

**[問題 8. 23]** 図 8.28 に示すように, 曲管の容器が  $x$  軸の方向に  $u$  の速度で動き, 容器の上部から相対速度  $w_1$  の速度で水が流入し,  $w_2$  の相対速度で容器から流出しているとする。この場合の  $x$  方向の反動力の成分  $F_x$ , およびそれによってなされる動力  $L_x$  が, それぞれ次式で表されることを証明せよ。

$$F_x = \rho Q (w_1 \cos \beta_1 - w_2 \cos \beta_2) \tag{8.63}$$

$$L_x = \rho Q \cdot u (w_1 \cos \beta_1 - w_2 \cos \beta_2) \tag{8.64}$$

ただし,  $Q$  は流量,  $\beta_1, \beta_2$  はそれぞれ  $u$  と  $w_1$ , および  $w_2$  の間の角度である。

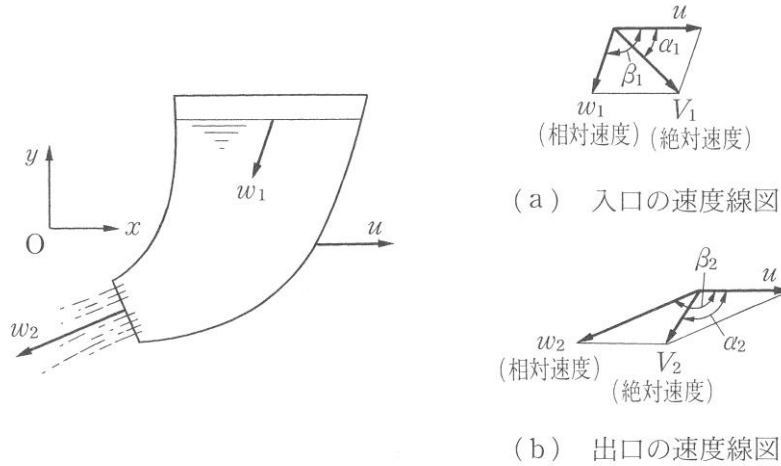


図 8.28

**【解】** 容器の入口と出口における速度線図は、図(a), (b)に示すとおりである。反動力の力の成分  $F_x$  は、(問題 8.22) と同じ考え方で、 $x$  方向の単位時間当たりの運動量の変化、すなわち、単位時間に流れる水の質量  $\rho Q$  と  $x$  方向の速度の変化 ( $V_1 \cos \alpha_1 - V_2 \cos \alpha_2$ ) の積に等しいから

$$F_x = \rho Q (V_1 \cos \alpha_1 - V_2 \cos \alpha_2) \quad (1)$$

となる。

次に、 $u$  の速度で動く容器に噴流がなす動力は、式(8.60)と同様に

$$L_x = F_x \cdot u = \rho Q u (V_1 \cos \alpha_1 - V_2 \cos \alpha_2) \quad (2)$$

となる。

一方 (問題 8.22) で述べたように、速度線図より

$$V_1 \cos \alpha_1 = u + w_1 \cos \beta_1 \quad (3)$$

$$V_2 \cos \alpha_2 = u + w_2 \cos \beta_2 \quad (4)$$

の関係があるので、式(3), (4)を、それぞれ式(1), (2)に代入すると

$$F_x = \rho Q (w_1 \cos \beta_1 - w_2 \cos \beta_2) \quad (5)$$

$$L_x = \rho Q \cdot u (w_1 \cos \beta_1 - w_2 \cos \beta_2) \quad (6)$$

となり、これらは式(8.63), (8.64)と一致する。

**【問題 8.24】** 図 8.29 に示すような形状の羽根をもつ衝動タービンにおいて、水の噴流の羽根入口での絶対速度が  $V_1=22 \text{ m/s}$ 、羽根の周速度が  $u=12.7 \text{ m/s}$ 、流量が  $Q=40 \text{ l/s}$  であり、 $\alpha_1$ 、 $\beta_1$ 、 $\beta_2$  は、それぞれ  $30^\circ$ 、 $60^\circ$ 、 $135^\circ$  であるとき、衝動タービンの出力  $L$ 、および効率  $\eta$  を求めよ。ただし、噴流が羽根面に沿って流れるときのエネルギー損失はないものとして計算せよ。

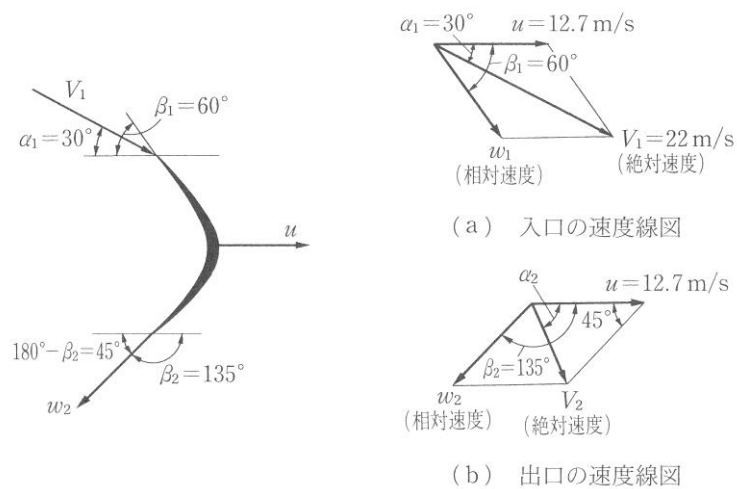


図 8.29

**【解】** 図(a)に示す羽根入口における速度線図より、幾何学的に

$$w_1^2 = u^2 + V_1^2 - 2uV_1 \cos\alpha_1 \quad (1)$$

であり、また、羽根面に沿ってのエネルギー損失はないから、 $w_1 = w_2$  と考えてよいので、結果的に動力と効率は、式(8.61)、(8.62)を用いて求められる。まず、入口での相対速度  $w_1$  は、式(1)を用い、図(a)の入口速度線図に示された値を代入すると

$$\begin{aligned} w_1 &= \sqrt{u^2 + V_1^2 - 2uV_1 \cos\alpha_1} \\ &= \sqrt{12.7^2 + 22^2 - 2 \times 12.7 \times 22 \times \cos 30^\circ} = 12.7 \text{ m/s} \end{aligned}$$

となる。次に、図(b)の出口の速度線図より幾何学的に

$$V_2^2 = u^2 + w_2^2 - 2uw_2 \cos(180^\circ - \beta_2) \quad (2)$$

であり、なお、 $w_1 = w_2 = 12.7 \text{ m/s}$ 、 $u = 12.7 \text{ m/s}$ 、 $\beta_2 = 135^\circ$  を次式に代入すると、絶対速度  $V_2$  は

$$\begin{aligned} V_2 &= \sqrt{u^2 + w_2^2 - 2uw_2 \cos(180^\circ - \beta_2)} \\ &= \sqrt{12.7^2 + 12.7^2 - 2 \times 12.7 \times 12.7 \times \cos 45^\circ} = 9.72 \text{ m/s} \end{aligned}$$

となる。したがって、動力  $L$  は、式(8.61)に  $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ 、 $Q = 40 \text{ l/s} = 0.04 \text{ m}^3/\text{s}$ 、 $V_1 = 22 \text{ m/s}$ 、 $V_2 = 9.72 \text{ m/s}$  を代入すると

$$\begin{aligned} L &= \frac{\rho Q (V_1^2 - V_2^2)}{2} \\ &= \frac{1000 \times 0.04 \times (22^2 - 9.72^2)}{2} = 7.79 \times 10^3 \text{ J/s} = 7.79 \times 10^3 \text{ W} = 7.79 \text{ kW} \end{aligned}$$

となり、効率  $\eta$  は、式(8.62)より

$$\eta = 1 - \frac{V_2^2}{V_1^2} = 1 - \frac{9.72^2}{22^2} = 0.805$$

すなわち、80.5%となる。