流体の力学　基礎編

基礎と演習　流れの力学

第 8 章　運動量の法則

＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊

第 8 章　運動量の法則

第8章　演　習　問　題

［問題 8. 10］ 図 8.19 に示すような水車の羽根に速度 V，流量 Q の水が衝突し，羽根は速度 u で動いているものとする。水車の羽根は平板で流れは平面的として，この羽根に及ぼす水の力 F および動力 L を求めよ。また，動力 L の値が最大となる u と V との関係，および動力の最大値 L_{max} と，このときの効率 η_{max} を求めよ。

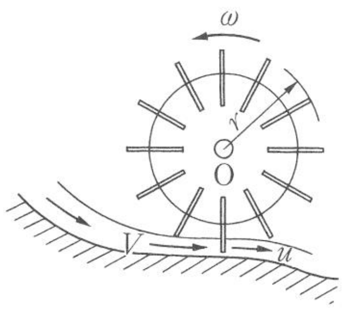

図 8.19

［解］ 題意より，速度 u で動いている水車の羽根に絶対速度 V の噴流が衝突するので，平板に対する噴流の相対速度は $V-u$ である。この水車の羽根は 1 枚ではなく数が多いから 8.2.5 で述べたように，噴流の断面積を A とすると，羽根は常に流量 $Q=AV$ を受けていることになる。したがって，水が u の速度で動

いている水車の羽根に及ぼす力 F は，式(8.32)において β =90° の場合を考えて求めればよい。すなわち

$$F = \rho Q(V-u) = \rho AV(V-u) \tag{8.49}$$

となる。また，羽根の受ける動力 L は

$$L = F \cdot u = \rho Q(V-u)\ u = \rho AuV(V-u) \tag{8.50}$$

となる。

動力 L の式(8.50)において，羽根に衝突する噴流の流量 Q，および水の速度 V が一定であるとすると，L が最大となる時の速度 u は

$$\frac{dL}{du} = 0$$

の関係から求められる。すなわち

$$\frac{dL}{du} = \frac{d}{du}\left\{ \rho Q(V-u)\ u \right\} = \rho Q(V-2u) = 0$$

$$\therefore \ u = \frac{V}{2} \tag{8.51}$$

これより，動力は羽根の速度 u が水の速度 V の 1 / 2 のときに，最大となることがわかる。したがって，水が羽根に及ぼす動力の最大値 $L_{\max}$ は，式(8.50)に u=V/2 を代入することによって得られ

$$L_{\max} = \rho Q\left(V - \frac{V}{2}\right)\frac{V}{2} = \frac{1}{4}\rho QV^2 = \frac{\rho AV^3}{4} \tag{8.52}$$

となる。

ある羽根面を単位時間に通過する水の流れのエネルギを L_t とすると，L_t は水の流れの運動エネルギ，すなわち $(\text{質量}) \times (\text{速度})^2$ ／2 に等しく，ρQ は単位時間に通過する質量である。したがって，L_t は，単位時間当たりのエネルギ，すなわち動力を意味するので

$$L_t = \frac{1}{2}\rho QV^2 = \frac{\rho}{2}AV^3 \tag{8.53}$$

となる。ゆえに，水が羽根に作用するときに利用される動力の割合，すなわち

効率の最大値 $\eta_{\max}$ は，式(8.52)と(8.53)より

$$\eta_{\max} = \frac{L_{\max}}{L_t} = \frac{1}{2} \tag{8.54}$$

となる。

［問題 8.11］ 図 8.19 の水車において，水車の中心から羽根の先端までの距離 r を 1 m，水の流れの速度を 10 m/s としたとき，この水車が最大の効率を発生できるようにするには，水車の回転数 n をいくらに制御すればよいか。また，このときの水の流れが羽根に及ぼす最大の力 $F_{\max}$，最大動力 $L_{\max}$ を求めよ。ただし，羽根面に衝突する水の流れの有効断面積 A を 0.2 m^2 とし，1 枚の羽根が水の運動エネルギを有効に得ることができ，損失等はないものとする。

［解］ 動力が最大となるときの羽根の移動速度 u は，式(8.51)より得られ，V=10 m/s を代入すると

$$u = \frac{V}{2} = \frac{10}{2} = 5 \ \ \text{m/s}$$

流れが羽根面に及ぼす最大の力 $F_{\max}$ は，式(8.49)に ρ =1000 kg/m^3，A=0.2 m^2，V=10 m/s，u=5 m/s を代入して

$$F_{\max} = \rho Q(V-u) = \rho AV(V-u) = 1000 \times 0.2 \times 10 \times (10-5) = 10 \times 10^3 \ \ \text{N} = 10 \ \ \text{kN}$$

となる。また，羽根の受ける最大動力 $L_{\max}$ は，式(8.52)より得られ

$$L_{\max} = \frac{\rho AV^3}{4} = \frac{1000}{4} \times 0.2 \times 10^3 = 50 \times 10^3 \ \ \text{N} = 50 \ \ \text{kN}$$

次に，水車の角速度 ω は，周速度 u=5 m/s，半径 r =1 m であるから

$$\omega = \frac{u}{r} = \frac{5}{1} = 5 \ \ \text{rad/s}$$

となり，毎分の回転数 n は

$$n = \frac{60}{2\pi}\omega = \frac{60}{2\pi} \times 5 = 48 \ \ \text{rpm}$$

となる。

［問題 8.12］図 8.7(a)に示すような固定している曲面板に直径 100 mm，速度 50 m/s の水の噴流が曲面に沿って流入し，流れの方向が θ =120° の角度だけ変えて流出している。噴流がこの曲面板に及ぼす力，およびその方向を求めよ。

［解］x 方向に作用する力 F_x は，式(8.20)より求まり， ρ =1000 kg/m^3，A=(π/4)×0.1^2 m^2，V=50 m/s， θ =120° を代入すると

$$F_x = \rho Q(V - V\cos\theta) = \rho AV^2(1-\cos\theta)$$

$$= 1000\times\frac{\pi\times 0.1^2}{4}\times 50^2\times(1-\cos 120°) = 29.45\times 10^3 \text{ N} = 29.45 \text{ kN}$$

y 方向に作用する力 F_y は，式(8.21)より求まり，それぞれ上記の値を代入すると

$$F_y = -\rho QV\sin\theta = -\rho AV^2\sin\theta$$

$$= -1000\times\frac{\pi\times 0.1^2}{4}\times 50^2\times\sin 120° = -17.0\times 10^3 \text{ N} = -17 \text{ kN}$$

したがって，曲面板に作用する力 F は，式(8.22)より

$$F = \sqrt{F_x{}^2 + F_y{}^2} = \sqrt{29.45^2 + 17^2} = 34 \text{ kN}$$

となり，力の方向 β は，式(8.23)より

$$\beta = \tan^{-1}\left(\frac{F_y}{F_x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{-17}{29.45}\right) = -30°$$

となる。

［問題 8.13］図 8.8 に示すような移動している曲面板に速度 V=30 m/s，流量 Q =2 m^3/min の水の噴流が曲面に沿って流入し，流れの方向が θ =45° の角度だけ変えて流出している。曲面板の移動速度 u=10 m/s として，噴流がこの曲面板に及ぼす x，y 方向の力，および動力を求めよ。

［解］移動している曲面板の受ける x 方向の力の成分は，式(8.26)より求まり，ρ =1000 kg/m^3， V=30 m/s，u=10 m/s， θ =45° ，A= Q/V=2/(60×30) m^2 を代入すると

$$F_x = \rho\, Q'(V-u)\ (1-\cos\theta) = \rho A(V-u)^2(1-\cos\theta)$$

$$= \rho\frac{Q}{V}(V-u)^2(1-\cos\theta) = 1000\times\frac{2/60}{30}(30-10)^2(1-\cos 45°) = 130.2\ \ \mathrm{N}$$

となる。また，y 方向の力の成分は，式(8.27)より求まり，それぞれ上記の値を代入すると

$$F_y = -\rho\, Q'(V-u)\ \sin\theta = -\rho A(V-u)^2\sin\theta$$

$$= -1000\times\frac{2/60}{30}(30-10)^2\sin 45° = -314.3\ \ \mathrm{N}$$

となる。動力は，式(8.28)より

$$L = F_x \cdot u = 130.2\times 10 = 1302\ \mathrm{J/s} = 1302\ \mathrm{W}$$

となる。

［問題 8. 14］ 図 8.20 に示すように，流速 60 m/s，直径 100 mm の水がノズルから噴出し，u=50 m/s で移動しているバケットに衝突している。噴流はバケットで 180° 方向を曲げられるとして，噴流がこのバッケットに及ぼす力，およびバケットの動力を求めよ。

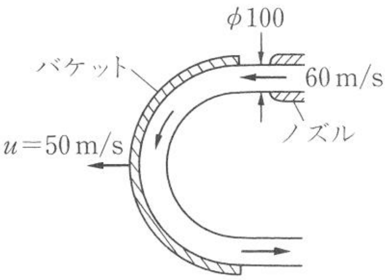

図 8.20

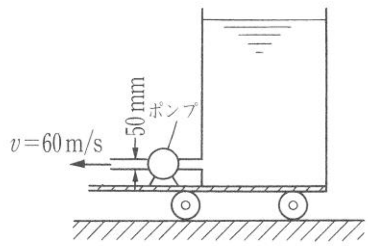

図 8.21

［解］噴流がバケットに及ぼす力 F は，式(8.30)より求まり，ρ =1000 kg/m^3, A=(π/4)×0.1^2 m^2 ，V=60 m/s，u=50 m/s およびここでは β =0° と考えてよいので，これらを代入すると

$$F = \rho\, Q'(V-u)\ (1+\cos\beta) = \rho A(V-u)^2(1+\cos\beta)$$

$$= \rho A(V-u)^2(1+\cos 0^\circ)$$
$$= 2\rho A(V-u)^2$$
$$= 2\times 1000\times \frac{\pi\times 0.1^2}{4}(60-50)^2 = 1.57\times 10^3 \ \mathrm{N} = 1.57 \ \mathrm{kN}$$

動力 L は，式(8.31)より

$$L = F\cdot u = 1.57\times 10^3\times 50 = 78.5\times 10^3 \ \mathrm{J/s} = 78.5\times 10^3 \ \mathrm{W} = 78.5 \ \mathrm{kW}$$

［問題 8.15］ 図 8.21 に示すように，台車の上に置かれた水槽の水をポンプによって直径 50 mm のノズルから 60 m/s の速度で大気中に噴出している。この台車が推力によって動かないようにするには，どれほどの力が必要か。

［解］ 台車が動かないようにするためには，ジェットによる推力と同じ力で反対方向に押す力が必要であるから，求める力 F_t は式(8.35)より得られ，ρ =1000 kg/m^3，a = (π/4)×0.05^2 m^2，V= 60 m/s を代入すると

$$F_t = \rho QV = \rho a V^2 = 1000\times \frac{\pi\times 0.05^2}{4}\times 60^2 = 7.07\times 10^3 \ \mathrm{N} = 7.07 \ \mathrm{kN}$$

となる。

［問題 8.16］ 図 8.22 に示すように，船首より取り入れた水をポンプによって船尾から後方に噴出させ，そのジェット推進力で進む船が絶対速度 c=54 km/h の速さで，u=3 m/s で流れている川を上流に向って進んでいる。この船に対する水の噴流の相対速度を V_2=30 m/s, 流量を Q=2 m^3/s として, この船の推進力, および動力を求めよ。

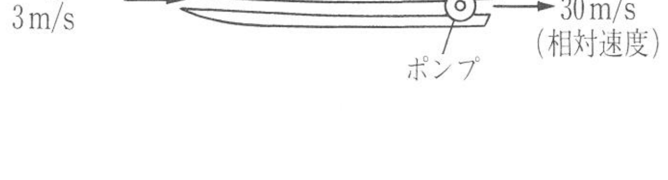

図 8.22

［解］ 船尾より噴出する噴流の船に対する相対速度は V_2=30 m/s，船の川の流れに対する相対速度 V_1 は，c=54 km/h=54×10^3/3600 m/s，u=3 m/s であるから

$$V_1 = c + u = \frac{54\times10^3}{3600} + 3 = 18 \ \text{m/s}$$

船の推進力 F_t は, 相対速度を基準にとって, 運動量の法則を適用すれば求まる。

$$F_t = \rho\, QV = \rho\, Q(V_2 - V_1) = 1000\times2\times(30-18) = 24\times10^3 \ \text{N} = 24 \ \text{kN}$$

動力 L は

$$L = F_t V_1 = 24\times10^3\times8 = 192\times10^3 \ \text{J/s} = 192\times10^3 \ \text{W} = 192 \ \text{kW}$$

となる。

［問題 8. 17］ 図 8.11 に示すように，ターボジェットエンジンを搭載したジェット機が質量流量 G=2 kg/s の空気を取り入れながら，v_0=150 m/s の速度で飛行している。排気ガスの相対速度を w_e=700 m/s としたときのジェットの推力 F_t, およびエンジンの動力 L を求めよ。

［解］ ジェットの推力 F_t は，流入，流出の質量流量 G を一定とすると，式(8.39)より求まる。

$$F_t = \rho\, Q(w_e - v_o) = G(w_e - v_o) = 2\times(700-150) = 1100 \ \text{N} = 1.1 \ \text{kN}$$

また，エンジンの動力 L は，式 (8.38)より

$$L = F_t \cdot v_o = 1100\times150 = 165\times10^3 \ \text{W} = 165 \ \text{kW}$$

となる。