# 流体の力学　基礎編

## 基礎と演習　流れの力学

## 第 8 章　運動量の法則

＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊
## 第 8 章　運動量の法則

## 第8章　演　習　問　題

**［問題 8.1］** 図 8.15 に示すように，流入速度 $V_1$ と流出速度 $V_2$ とのなす角度が 45°の曲管内を流量 4 $m^3$/min の水が流れている。断面①での圧力を 300 kPa, 内径を 200 mm，断面②での内径を 100 mm とするとき，水が曲管に及ぼす力とその方向を求めよ。ただし，重力の影響や曲管内の摩擦による損失は無視する。

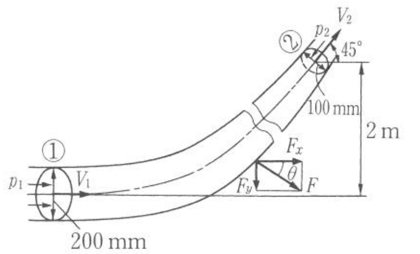


図 8.15

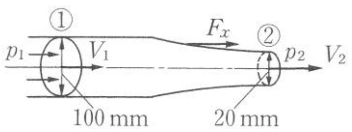


図 8.16

**［解］** 断面①，②間にベルヌーイの式(3.9)を適用して， $\rho$ =1000 kg/$m^3$，$p_1$=300 kPa=300×$10^3$ Pa，$h$=2 m を代入すると

$$\frac{300\times10^3}{1000}+\frac{{V_1}^2}{2}+0=\frac{p_2}{1000}+\frac{{V_2}^2}{2}+2g \qquad (1)$$

一方，連続の式より $V_1$，$V_2$ を求める。流量 $Q$=4 m$^3$/min=4/60 m$^3$/s，断面積 $A_1$=(π/4)×0.2$^2$ m$^2$，$A_2$=(π/4)×0.1$^2$ m$^2$ であるから

$$V_1 = \frac{4/60}{(\pi/4)\times 0.2^2} = 2.12 \ \text{m/s}$$

$$V_2 = \frac{4/60}{(\pi/4)\times 0.1^2} = 8.49 \ \text{m/s}$$

となる。これらの速度を式(1)に代入して，断面②の圧力 $p_2$ を求める。

$$p_2 = \left(300 + \frac{2.12^2}{2} - \frac{8.49^2}{2} - 2\times 9.8\right)\times 10^3 = 246.6\times 10^3 \ \text{N/m}^2 = 246.6 \ \text{kPa}$$

ゆえに，水が曲管に及ぼす $x$ 方向の力 $F_x$ は，式(8.5)より

$$\therefore \ F_x = \rho Q(V_1\cos\alpha_1 - V_2\cos\alpha_2) + (p_1A_1\cos\alpha_1 - p_2A_2\cos\alpha_2)$$

$$= \frac{1000\times 4}{60}(2.12\times\cos 0° - 8.49\times\cos 45°) + (300\times 10^3\times\frac{\pi\times 0.2^2}{4}\times\cos 0°$$

$$- 246.6\times 10^3\times\frac{\pi\times 0.1^2}{4}\cos 45°) = 7.8\times 10^3 \ \text{N} = 7.8 \ \text{kN}$$

となる。また，$y$ 方向の力 $F_y$ は，式(8.7)より

$$\therefore \ F_y = \rho Q(V_1\sin\alpha_1 - V_2\sin\alpha_2) + (p_1A_1\sin\alpha_1 - p_2A_2\sin\alpha_2)$$

$$= \frac{1000\times 4}{60}(2.12\times\sin 0° - 8.49\times\sin 45°)$$

$$+ \left(300\times 10^3\times\frac{\pi\times 0.2^2}{4}\times\sin 0° - 246.6\times 10^3\times\frac{\pi\times 0.1^2}{4}\times\sin 45°\right)$$

$$= -1.77\times 10^3 \ \text{N} = -1.77 \ \text{kN}$$

となる。したがって，曲管に及ぼす水の力 $F$ は，式(8.8)より

$$F = \sqrt{{F_x}^2 + {F_y}^2} = \sqrt{7.8^2 + 1.77^2} = 8 \ \text{kN}$$

となり，力の方向 $\theta$ は，式(8.9)より

$$\theta = \tan^{-1}(F_y/F_x) = \tan^{-1}(-1.77/7.8) = -12.8°$$

となる。

**［問題 8.2］** 図 8.16 に示すような先細ノズルの先端から高速の水が噴出している。断面①における圧力が 2 MPa(gauge)，管内径が 100 mm，ノズル出口②におけるノズル内径が 20 mm であるとして，この先細ノズルに及ぼす流れ方向の水の力を求めよ。

**［解］** ノズル内での管摩擦などの損失は無視して，断面①と出口②の間にベルヌーイの式(3.9)を適用して，$\rho$ =1000 kg/m$^3$，$p_2$= $p_a$ (大気圧)= 0 (gauge)，$p_1$=2 MPa=2×$10^6$ Pa (gauge)，$h_1$=$h_2$=0 m を代入すると

$$\frac{2\times10^6}{1000}+\frac{{V_1}^2}{2}+0=0+\frac{{V_2}^2}{2}+0 \tag{1}$$

一方，連続の式より $A_1V_1 = A_2V_2$ であるから，断面積の比 $A_1/A_2$=$0.1^2/0.02^2$ を代入すると，$V_1$，$V_2$ の比が次式で求まる。

$$V_2=\frac{A_1}{A_2}V_1=\frac{0.1^2}{0.02^2}V_1=25V_1 \tag{2}$$

式(1)，(2)より，流速 $V_1$，$V_2$ は求まり

$$V_1 = 2.53\ \ \text{m/s}$$

$$V_2 = 63.25\ \ \text{m/s}$$

となる。ゆえに流量 $Q$ は

$$Q=A_1V_1=\frac{\pi\times0.1^2}{4}\times2.53=0.0199\ \ \text{m}^3/\text{s}$$

となる。水が先細ノズルに及ぼす流れ方向の力 $F_x$ は，式(8.5)を適用して，$\rho$ =1000 kg/m$^3$，$Q$=0.0199 m$^3$/s，$V_1$=2.53 m/s，$V_2$=63.25 m/s，$p_1$=2×$10^6$ Pa，$p_2$= 0，$A_1$=($\pi$/4)×$0.1^2$，$\alpha_1$=$\alpha_2$= 0° を代入すると

$$\therefore\ F_x=\rho\ Q(V_1\cos\alpha_1-V_2\cos\alpha_2)+(p_1A_1\cos\alpha_1-p_2A_2\cos\alpha_2)$$

$$=1000\times0.0199(2.53\times\cos0^\circ-63.25\times\cos0^\circ)$$

$$+\left(2\times10^6\times\frac{\pi\times0.1^2}{4}\times\cos0^\circ-0\right)$$

$$=14.5\times10^3\ \ \text{N}=14.5\ \ \text{kN}$$

［問題 8.3］図 8.17 に示すように，水平面内に置かれた 60°の曲管の中を流量 300 $l$ /s の水が流れており，管端②の位置から大気中に流出している。断面①での管内径を 350 mm，管端②での管内径を 250 mm として，水が曲管に及ぼす力とその方向を求めよ。

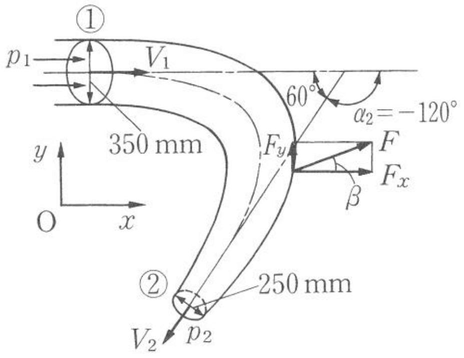


図 8.17

［解］連続の式 $Q=V_1A_1=V_2A_2$ より，断面①，②における流速 $V_1$, $V_2$ を求める。

$Q$=300 $l$/s=300×$10^{-3}$ m$^3$/s，$A_1$=(π/4)×0.35$^2$ m$^2$，$A_2$=(π/4)×0.25$^2$ m$^2$ より

$$V_1=\frac{300\times10^{-3}}{(\pi/4)\times0.35^2}=3.12\ \text{m/s}$$

$$V_2=\frac{300\times10^{-3}}{(\pi/4)\times0.25^2}=6.11\ \text{m/s}$$

となる。次に，ベルヌーイの式を適用して断面①の圧力 $p_1$(gauge)を求める。曲管は同一水平面内にあり，管出口の圧力 $p_2$ は大気圧 $p_a$ に等しいから，$p_2 = p_a$= 0 (gauge)である。したがって，ベルヌーイの式は

$$p_1+\frac{\rho}{2}V_1{}^2=0+\frac{\rho}{2}V_2{}^2 \qquad (1)$$

となる。これより

$$p_1=\frac{\rho}{2}\left(V_2{}^2-V_1{}^2\right) \qquad (2)$$

を得る。式(2)に $\rho$ =1000 kg/m$^3$，$V_1$=3.12 m/s，$V_2$= 6.11 m/s を代入すると

$$p_1 = \frac{1000}{2}\left(6.11^2 - 3.12^2\right) = 13.8\times10^3\ \ \mathrm{N/m^2} = 13.8\ \ \mathrm{kN/m^2}\,(\mathrm{gauge})$$

となる。ゆえに，水が曲管に及ぼす $x$ 方向の力 $F_x$は，式(8.5)を適用すれば求まる。

$$F_x = \rho\ Q\left(V_1\cos\alpha_1 - V_2\cos\alpha_2\right) + \left(p_1A_1\cos\alpha_1 - p_2A_2\cos\alpha_2\right) \qquad (8.5)$$

いま，$V_1$の方向を $x$ 軸と一致させて $\alpha_1 = 0°$ とすると，$V_2$の方向は図 8.2 より $\alpha_2 = -120°$ となる。さらに，$\rho$ =1000 kg/m$^3$，$Q$=300×10$^{-3}$ m$^3$/s，$V_1$=3.12 m/s，$V_2$=6.11 m/s，$p_1$=13800 N/m$^2$(gauge)，$p_2$= 0，$A_1$=($\pi$/4)×0.35$^2$ m$^2$，$A_2$=($\pi$/4)×0.25$^2$ m$^2$を上式に代入すると

$$F_x = 1000\times300\times10^{-3}\times\left\{\ 3.12\times\cos0° - 6.11\times\cos(-120°)\right\}$$
$$+\left\{\ 13800\times(\pi/4)\times0.35^2\times\cos0° - 0\right\} = 3.18\times10^3\ \ \mathrm{N} = 3.18\ \ \mathrm{kN}$$

同様に，$y$ 軸方向に及ぼす力 $F_y$は，式(8.7)より求まる。

$$F_y = \rho\ Q\left(V_1\sin\alpha_1 - V_2\sin\alpha_2\right) + \left(p_1A_1\sin\alpha_1 - p_2A_2\sin\alpha_2\right) \qquad (8.7)$$

上式にそれぞれの値を代入すると，右辺第 2 項は 0 となり

$$F_y = 1000\times300\times10^{-3}\times\left\{\ 3.12\times\sin0° - 6.11\times\sin(-120°)\right\}$$
$$= 1.59\times10^3\ \ \mathrm{N} = 1.59\ \ \mathrm{kN}$$

となる。したがって，水が曲管に及ぼす力 $F$ は，式(8.8)より

$$F = \sqrt{{F_x}^2 + {F_y}^2} = \sqrt{3.18^2 + 1.59^2} = 3.56\ \ \mathrm{kN}$$

力 $F$ の方向 $\beta$ は，式(8.9)より

$$\beta = \tan^{-1}\left(F_y / F_x\right) = \tan^{-1}(1.59/3.18) = 26.6°$$

となる。

**［問題 8.4］** 図 8.3 に示すような垂直に置かれた大きな平板に流量 10 m$^3$/min の水が垂直に衝突している。噴流が平板に及ぼす力を 1 kN 以下にするには，噴流の速度をいくらにおさえたらよいか。また，そのときの噴流の直径を求めよ。

**［解］** 噴流が平板に及ぼす力は，式(8.10)より $F = \rho QV$ であるから，$F$=1 kN=1×10$^3$ N，$\rho$ =1000 kg/m$^3$，$Q$=10/60 m$^3$/s を代入すると，噴流の限界速度 $V$ は

$$V=\frac{F}{\rho\ Q}=\frac{1\times 10^3}{1000\times(10/60)}=6\ \ \mathrm{m/s}$$

となる。次に，噴流の直径 $d$ は，連続の式 $Q=VA=(\pi/4)\ d^2V$ より

$$d=\sqrt{\frac{4Q}{\pi V}}=\sqrt{\frac{4\times(10/60)}{6\pi}}=0.188\ \ \mathrm{m}=18.8\ \ \mathrm{cm}$$

となる。

**［問題 8.5］** 図 8.4 に示すような固定された小さな円板に直径 100 mm の水の噴流が速度 50 m/s で衝突している。噴流と $\theta$ = 60°の角度で円板から流れ去るとき，噴流がこの円板に及ぼす力を求めよ。

**［解］** 噴流が小円板に及ぼす力 $F$ は，式(8.11)より求まり，$\rho$ =1000 kg/m$^3$，$Q$ =$AV$=($\pi$/4)×0.1$^2$×50 m$^3$/s，$V$=50 m/s，$\theta$ = 60°を代入すると

$$\begin{aligned}F&=\rho\ QV(1-\cos\theta)=\rho\ AV^2(1-\cos\theta)\\&=1000\times\frac{\pi\times 0.1^2}{4}\times 50^2(1-\cos 60°)\\&=9.82\times 10^3\ \ \mathrm{N}=9.82\ \ \mathrm{kN}\end{aligned}$$

となる。

**［問題 8.6］** 図 8.18 に示すような頂角 60°の円すい体に直径 150 mm の水が速度 20m /s で衝突している場合，この円すい体に作用する噴流の力を求めよ。

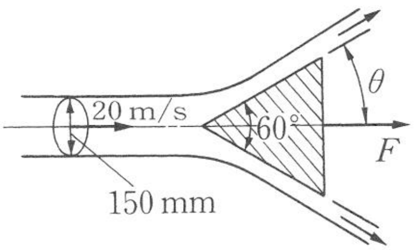

図 8.18

**［解］** 噴流は円すい体に衝突後 $\theta$ =30°の方向に流れていくので，噴流の円すい体に及ぼす力 $F$ は，式(8.11)より求まり，$\rho$ =1000 kg/m$^3$，$Q$=$AV$=($\pi$/4)×0.15$^2$×20 m$^3$/s，$V$=20 m/s，$\theta$ =30°を代入すると

$$F = \rho QV(1-\cos\theta) = \rho AV^2(1-\cos\theta)$$

$$= 1000 \times \frac{\pi \times 0.15^2}{4} \times 20^2 (1-\cos 30^\circ) = 947 \ \mathrm{N}$$

となる。

**［問題 8. 7］図** 8.5 に示すような傾斜平板に直径 100 mm の水が速度 50 m/s で衝突している。傾斜角度が $\theta = 60^\circ$ の場合，噴流が傾斜平板に及ぼす力を求めよ。

**［解］**噴流が傾斜平板に及ぼす力 $F$ は，式(8.12)より求まり，$\rho$ =1000 kg/m$^3$，$Q$ = ($\pi$/4)×0.1$^2$×50 m$^3$/s，$V$=50 m/s，$\theta$ =60° を代入すると

$$F = \rho QV\sin\theta = \rho AV^2 \sin\theta$$

$$= 1000 \times \frac{\pi \times 0.1^2}{4} \times 50^2 \times \sin 60^\circ = 17.0 \times 10^3 \ \mathrm{N} = 17 \ \mathrm{kN}$$

となる。

**［問題 8. 8］**図 8.5 において，水平に置かれた固定した傾斜平板に沿う流れが二次元噴流と仮定する。このとき，最初の流れの流量 $Q$ が傾斜平板に衝突後，２方向に分かれて流量 $Q_1$，$Q_2$ となるとき，配分された流量 $Q_1$，$Q_2$ を最初の流量 $Q$ と角度 $\theta$ を用いて求めよ。ただし，運動量の式を適用するものとする。

**［解］**傾斜平板に沿う方向の運動量の変化を考える。衝突前の噴流がもっている傾斜平板方向の運動量は $\rho QV\cos\theta$，衝突後の傾斜平板方向の運動量は方向を考えて $\rho Q_1V_1$ および $-\rho Q_2V_2$ である。傾斜平板に沿う方向への力は働かないので

衝突前の運動量＝衝突後の運動量

と考えてよい。したがって，次の関係式を得る。

$$\rho QV\cos\theta = \rho Q_1V_1 - \rho Q_2V_2 \qquad (1)$$

いま，傾斜平板に衝突後，運動エネルギの損失がないものとすると，衝突前後の圧力エネルギ，位置エネルギは等しいからベルヌーイの式より，

$V_1 = V_2 = V$ となり，次式を得る。

$$Q\cos\theta = Q_1 - Q_2 \tag{2}$$

また

$$Q = Q_1 + Q_2 \tag{3}$$

であるから，式(2)，(3)より求める $Q_1$，$Q_2$ はそれぞれ

$$Q_1 = Q(1+\cos\theta)/2 \tag{8.47}$$

$$Q_2 = Q(1-\cos\theta)/2 \tag{8.48}$$

となる。これらの式は，三次元噴流の場合にも成立する。

**［問題 8.9］** 速度 $V$= 60 m/s，流量 $Q$= 3 m$^3$/min でノズルから噴出している水が，固定された大きな平板に垂直に衝突している。噴流がこの固定平板に及ぼす力 $F$ を求めよ。また，この平板が噴流と同じ方向に $u$=25 m/s の速さで移動しているとき，噴流がこの平板に及ぼす力 $F'$，および動力 $L$ を求めよ。

**［解］**噴流が大きな固定平板に及ぼす力 $F$ は，式(8.10)を用いて，$\rho$ =1000 kg/m$^3$，$Q$=3/60 m$^3$/s，$V$= 60 m/s を代入すると

$$F = \rho\, QV = 1000 \times (3/60) \times 60 = 3 \times 10^3 \ \ \mathrm{N} = 3 \ \ \mathrm{kN}$$

となる。次に，噴流が移動している場合，平板の受ける流量 $Q'$ は，式(8.15)を変形した式に $Q$=3/60 m$^3$/s，$u$=25 m/s，$V$= 60 m/s を代入すると

$$Q' = A(V-u) = \frac{Q}{V}(V-u) = Q\left(1-\frac{u}{V}\right) = \frac{3}{60}\left(1-\frac{25}{60}\right) = 0.029 \ \ \mathrm{m^3/s}$$

となるので，移動している平板の受ける力 $F'$ は，式(8.16)より

$$F' = \rho\, Q'(V-u)$$
$$= 1000 \times 0.029 \times (60-25) = 1.02 \times 10^3 \ \ \mathrm{N} = 1.02 \ \ \mathrm{kN}$$

となる。また，噴流が平板に及ぼす動力 $L$ は，式(8.17)より求まり

$$L = F' \cdot u = 1.02 \times 10^3 \times 25$$
$$= 25.5 \times 10^3 \ \mathrm{N \cdot m/s} = 25.5 \times 10^3 \ \mathrm{J}/s = 25.5 \times 10^3 \ \mathrm{W} = 25.5 \mathrm{kW}$$

となる。