流体の力学　基礎編

基礎と演習　**流れの力学**

流体の力学　基礎編

第 8 章　運動量の法則

＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊

8.1　運動量の法則

運動量の法則を用いると，流れの局所の圧力や速度などが不明であっても境界面の状態のみによって流体の運動を解明できる。この手法は，力学における運動量保存則，すなわち，ニュートンの運動の第 2 法則を流れの場に適用して導かれる。いま，質点の力学において，質量 m，速度 $\boldsymbol{v}$ の物体に力 $\boldsymbol{F}$ が作用するとき，加速度を $\boldsymbol{\alpha}$ として第 2 法則より

$$\boldsymbol{F} = m\,\boldsymbol{\alpha} = m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\boldsymbol{v}) = \frac{d\boldsymbol{B}}{dt} \tag{8.1}$$

$$\boldsymbol{F}\cdot dt = m\cdot d\boldsymbol{v} \tag{8.2}$$

ここで，質量 m と速度 $\boldsymbol{v}$ との積 $m\boldsymbol{v}=\boldsymbol{B}$ を**運動量**(momentum)，$m\cdot d\boldsymbol{v}$ を運動量変化，$\boldsymbol{F}\cdot dt$ を**力積**(impulse)という。式(8.1)から，運動量の単位時間当りの変化は, 物体に作用する力に等しいことがわかる。これを**運動量の法則**(momentum law)という。この法則は流体にも適用することができる。この場合，運動量の単位時間当りの変化は，流体に作用する力に等しいことになる。

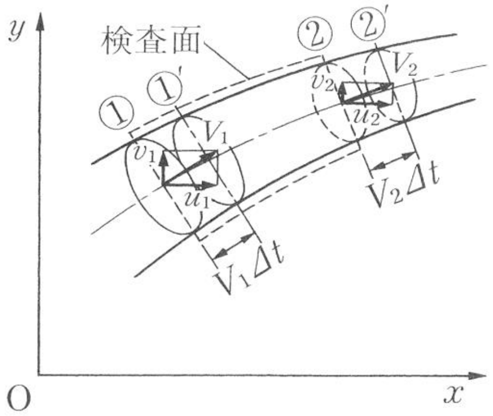

図 8.1　運動量の法則と検査面

図 8.1 に示すように，流体が曲管を定常状態で流れているとき，断面①，②の間にある流体に着目する。断面①，②を含む閉じた閉曲面を**検査面**(control surface)と呼ぶ。この検査面の中の流体に運動量の法則を適用してみよう。

ある時刻 t において，検査面内の断面①と②にあった流体は，それぞれの断面での速度を V_1，V_2 とすると，微小時間 Δt 後に $V_1 \Delta t$，$V_2 \Delta t$ だけ移動して，断面①'と②'に達する。最初に①-②間あった流体は，Δt 後に①'-②'に移動したことになり，共通部分の①'-②間の流体は時間的に変化していない。したがって，Δt 時間後の流体の運動量変化は，①-①'間の流体の運動量と②-②'間の流体の運動量の差に等しい。V_1，V_2 の x，y 方向の成分をそれぞれ u_1，v_1，および u_2，v_2 とする。①-①'間における流体の単位時間当りの質量は $\rho_1 A_1 V_1$，Δt 時間後の質量は $\rho_1 A_1 V_1 \Delta t$ であり，したがって，x 方向の運動量は $(\rho_1 A_1 V_1 \Delta t)\, u_1$，$y$ 方向の運動量は $(\rho_1 A_1 V_1 \Delta t)\, v_1$ となる。 また，②-②'間における流体の単位時間当りの質量は $\rho_2 A_2 V_2$，Δt 時間後の質量は $\rho_2 A_2 V_2 \Delta t$ より，x 方向の運動量は $(\rho_2 A_2 V_2 \Delta t)\, u_2$，$y$ 方向の運動量は $(\rho_2 A_2 V_2 \Delta t)\, v_2$ となる。なお，単位時間に流れる流体の質量，すなわち，**質量流量**(mass flow rate)を G とすると，連続の式より

$$G = \rho_1 A_1 V_1 = \rho_2 A_2 V_2$$

である。

x 方向の運動量の時間的変化率は，式(8. 1)を参照して

$$\frac{(\rho_2 A_2 V_2 \Delta t)\ u_2 - (\rho_1 A_1 V_1 \Delta t)\ u_1}{\Delta\ t}$$

であるから，単位時間の x 方向の運動量の変化は

$$\rho_2 A_2 V_2 u_2 - \rho_1 A_1 V_1 u_1 = G(u_2 - u_1)$$

同様に y 方向の運動量の変化は

$$\rho_2 A_2 V_2 \upsilon_2 - \rho_1 A_1 V_1 \upsilon_1 = G(\upsilon_2 - \upsilon_1)$$

となる。以上のことより，「流体の運動量の単位時間当りの変化は，検査面を単位時間に流出する運動量と検査面に流入する運動量との差に等しい」ことがわかる。

次に，運動量の法則により，検査面内の流体に外から作用する力を P とし，その x, y 方向の成分を P_x, P_y とすると

$$\begin{aligned} P_x &= G(u_2 - u_1) \\ P_y &= G(\upsilon_2 - \upsilon_1) \end{aligned} \tag{8.3}$$

流れが非圧縮性ならば，$\rho_1 = \rho_2 = \rho$ (一定)であるから，流量を Q とすると $G = \rho Q$ であるから

$$\begin{aligned} P_x &= \rho\ Q(u_2 - u_1) \\ P_y &= \rho\ Q(\upsilon_2 - \upsilon_1) \end{aligned} \tag{8.4}$$

式(8.3)，(8.4)を流れに対する**運動量の法則**(momentum law)といい，単位時間に検査面を通過した運動量の増加は，流体に外部より加えられた力に等しいことを意味する。運動量の法則を利用すると，このように二つの断面の流れの状態がわかれば，内部の流れの状態が不明であっても，流体に作用する力を求めることができる。なお，運動量の法則は，流体の圧縮性や粘性の有無には関係なく成立する。

8.2.1　曲管の壁面に作用する噴流の力

図 8.2 に示すような曲がり管内を水が流れている場合，水が管壁面に及ぼす力 F を運動量の法則を用いて求めることができる。

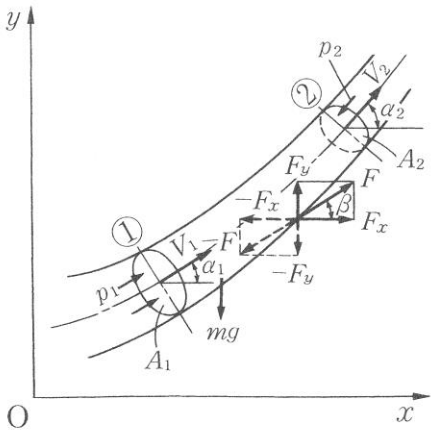

図 8.2　曲管の壁面に作用する力

圧力によって外部から水に及ぼす x，y 方向の力はそれぞれ

$$p_1 A_1 \cos\alpha_1 - p_2 A_2 \cos\alpha_2$$

$$p_1 A_1 \sin\alpha_1 - p_2 A_2 \sin\alpha_2$$

なお，力 F の x，y 方向の成分を F_x, F_y とすると，水は作用，反作用の法則により，管壁から $-F_x$, $-F_y$ の力を受ける。したがって，断面①−②間の水には，圧力による力と反作用の力とが作用するので，水に作用する力 P の x 方向の力 P_x は

$$P_x = -F_x + (p_1 A_1 \cos\alpha_1 - p_2 A_2 \cos\alpha_2)$$

y 方向の力 P_y は，重力を考慮して

$$P_y = -F_y + (p_1 A_1 \sin\alpha_1 - p_2 A_2 \sin\alpha_2) - mg$$

ここに，m は断面①-②間の水の質量である。

また，x，y 方向の運動量の増加率は，水の密度 ρ を一定とすると

$$\rho Q(V_2 \cos\alpha_2 - V_1 \cos\alpha_1)$$

$$\rho Q(V_2 \sin\alpha_2 - V_1 \sin\alpha_1)$$

結局，運動量の法則より，水の受ける力 P_x，P_yは，上に示した運動量の増加率と等しいので，これらを等置して整理すると，F_x，F_yは，それぞれ式(8.5)，(8.6)で求めることができる。

$$P_x = -F_x + (p_1 A_1 \cos\alpha_1 - p_2 A_2 \cos\alpha_2) = \rho Q(V_2 \cos\alpha_2 - V_1 \cos\alpha_1)$$

$$\therefore\ F_x = \rho Q(V_1 \cos\alpha_1 - V_2 \cos\alpha_2) + (p_1 A_1 \cos\alpha_1 - p_2 A_2 \cos\alpha_2) \qquad (8.5)$$

また

$$P_y = -F_y + (p_1 A_1 \sin\alpha_1 - p_2 A_2 \sin\alpha_2) - mg = \rho\ Q(V_2 \sin\alpha_2 - V_1 \sin\alpha_1)$$

$$\therefore\ F_y = \rho\ Q(V_1 \sin\alpha_1 - V_2 \sin\alpha_2) + (p_1 A_1 \sin\alpha_1 - p_2 A_2 \sin\alpha_2) - mg \qquad (8.6)$$

重力の影響を無視すると式(8.6)は

$$\therefore\ F_y = \rho\ Q(V_1 \sin\alpha_1 - V_2 \sin\alpha_2) + (p_1 A_1 \sin\alpha_1 - p_2 A_2 \sin\alpha_2) \qquad (8.7)$$

水が管壁面に及ぼす力 F およびその方向 β はそれぞれ

$$F = \sqrt{{F_x}^2 + {F_y}^2} \qquad (8.8)$$

$$\beta = \tan^{-1}\left(\frac{F_y}{F_x}\right) \qquad (8.9)$$

となる。