流体の力学　基礎編

＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊

2.4　相対的静止状態における力学

ａ．静止流体力学の基礎式

重力場における静止流体中の流体力は，圧力と単位質量に作用する外力（重力による体積力）だけであり，流体が静止を保つにはこの圧力と体積力はつり合う必要がある。このつり合いの条件を考えてみよう。

いま，静止流体中に図 2.24 に示すような微小直方体 $dxdydz$ を考える。

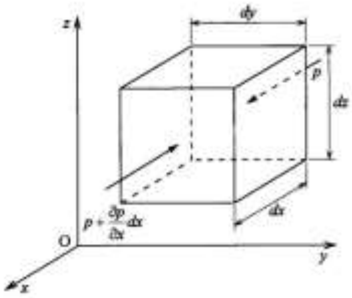

図 2.24　微小直方体にはたらく力のつりあい

微小直方体の x 軸方向には圧力による差$[\,p-\{p+(\partial p/\partial x)\,dx\}\,]dydz$ が作用する。

体積力の x 軸方向の成分を X とすると，$\rho Xdxdydz$ の体積力がはたらくので，つりあいの条件より

$$\left\{p-\left(p+\frac{\partial p}{\partial x}dx\right)\right\}dydz+(\rho\ Xdxdydz)=0 \qquad (2.37)$$

同様にして，y，z 軸方向にはたらく力も求まる。

すなわち

$$\frac{\partial p}{\partial x}=\rho X$$
$$\frac{\partial p}{\partial y}=\rho Y \qquad (2.38)$$
$$\frac{\partial p}{\partial z}=\rho Z$$

すなわち，静止流体中の圧力は外力の作用する方向に増加し，圧力こう配（pressure gradient）は密度と外力（体積力）の積に等しい。式（2.38）を**静止流体力学（静水力学）**の基礎式という。

静止流体中の圧力 p は，方向には無関係であり，一般に位置 x, y, z の関数であるから

$$dp=\frac{\partial p}{\partial x}dx+\frac{\partial p}{\partial y}dy+\frac{\partial p}{\partial z}dz \qquad (2.39)$$

したがって，式（2.39）は

$$dp=\rho\left(Xdx+Ydy+Zdz\right) \qquad (2.40)$$

となる。たとえば，静止流体に外力として重力だけが作用している場合には，

$X=0$，$Y=0$，$Z=-g$ を式(2.40)に代入すると

$$dp=-\rho gdz \qquad (2.41)$$

となり，式(2.16)と同一の関係式が得られる。

b．等圧面と力線

流体中で圧力の等しい点を結んでいくと，一つの面が形成される。これを**等圧面**（equi-pressure surface）といい，たとえば，水面上ではいずれの点においても圧力の等しい等圧面を形成する。

したがって，静止流体中の等圧面は，一般に次式で与えられる。

$$p\left(x,y,z\right)=\text{一定} \qquad (2.42)$$

静止流体の等圧面は式（2.40）において $dp=0$ であるから

$$Xdx+Ydy+Zdz=0 \qquad (2.43)$$

外力の作用する方向を示す線を**力線**（line of force）といい，力線は等圧面に直交するので，力線の式は

$$\frac{dx}{X}=\frac{dy}{Y}=\frac{dz}{Z} \qquad (2.44)$$

と表せる。

ｃ．相対的静止状態における運動

１）ダランベールの原理

容器内の水が一体として運動しているが，隣接する水の粒子間に相対的な変動がなく，静止流体の場合と同じようにせん断応力が作用しないとき，これを相対的静止といい，運動している流体は静的なつり合いを保っている。つまり，運動している水に座標軸を固定すると水は静止状態にあり，静止している流体として取り扱うことができる。質点系の力学におけるニュートンの運動法則（第二法則）$F=m\alpha$において，流体粒子に作用する外力（粘性力と圧力による力）をF，加速度をα，質量をmとし，$F-m\alpha=0$と考えると，外力Fと慣性力$m\alpha$の静的つり合いに置き換えることができる。これを**ダランベールの原理**(D'Alembert's principle)という。つまり，流体に加えられた加速度と大きさが等しく，方向が反対の加速度を生ずるような慣性力を外力と見なすと，前述した静止流体力学として取り扱ってよい。このダランベールの原理により，一定加速度で運動している容器内の水や，一定角速度で回転している容器内の水の運動を簡単に求めることができる。

２）直線運動

一定の加速度で発進，加速している新幹線の列車内の乗客には，新幹線の加速度の方向と大きさが等しく，方向が反対の加速度をもつような慣性力が作用する。そのために，乗客には慣性力と重力の合力が作用し，後部座席の方向に引き寄せらることになる。図 2.25 に示すように，一定加速度で移動している容器内の水にも同じような考え方が適用できる。相対的に静止している水面における任意の位置M点での水の質量mには，容器の加速度αとは反対方向の慣性力$m\alpha$と重力mgの合成力（体積力）Rが作用する。この力Rは水面に垂直な力線であり，力線に直交する方向には力は作用しないので，このような状態にある水面は等圧面となる。したがって，質量mに作用する合成力（流体力）Rは

$$R=m\sqrt{g^2+\alpha^2} \qquad (2.45)$$

また，水面が水平面となす角βは

$$\tan\beta=\alpha/g \qquad (2.46)$$

となる。

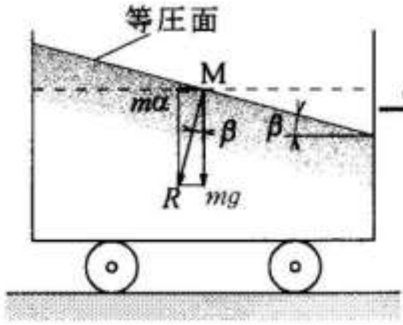

図 2.25　一定加速度で移動している容器内の水面にはたらく力

［例題 2.13］図 2.26 に示すように，長さ 4m，深さ 3m の水槽車に底面より 2m の高さまで水が満たされている。いま，水平方向に一定の加速度で直線運動をする場合，水面が水槽後方の上縁に達する時の加速度 α を求めよ。

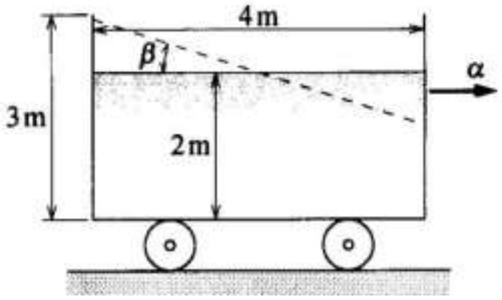

図 2.26　一定加速度で直線運動する水槽車

［解］式(2.46)より

$$\alpha = g\tan\beta$$

$$= 9.8 \times \frac{3-2}{4/2}$$

$$= 4.9\ \mathrm{m/s^2}$$

３）回転運動

図 2.27 に示すように，円筒形の容器内の水が容器とともに中心軸まわりに一定の角速度 ω で回転し，水が安定して相対的静止状態にあるとする。このような運動を**強制渦運動**(forced vortex motion)という。強制渦運動では，円周速度 u は半径 r に比例する。すなわち

$$u = r\omega, \qquad du/dr = \omega \qquad (\omega: 一定) \tag{2.47}$$

の関係がある。

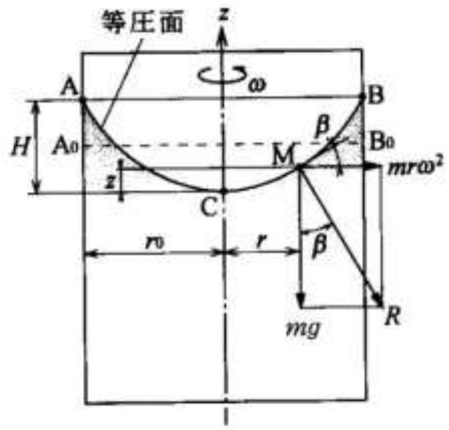

図 2.27　強制渦と水面の高さ

いま，図において，最初A_0B_0の位置まで水を満たし，容器と水が同じ角速度ωに達した時の水位がＡＢである。中心軸（Z軸）よりrの位置M点での流体粒子の質量をmとすると，質量mには，遠心力$mr\omega^2$と重力mgがはたらき，これらの力の合力Rは，大気圧である等圧面の水面に垂直に作用する。したがって，合力Rは

$$R = m\sqrt{g^2 + r^2\omega^4} \tag{2.48}$$

となる。また水面におけるM点での接線と水平面との角度をβとすると

$$\tan\beta = \frac{r\omega^2}{g} \tag{2.49}$$

一方，曲線の傾斜は一般に

$$\tan\beta = \frac{dz}{dr} \tag{2.50}$$

で表せるから，この式と式(2.49)より等圧面においては

$$\frac{dz}{dr} = \frac{r\omega^2}{g} \tag{2.51}$$

これを積分すると

$$gz - \frac{1}{2}r^2\omega^2 = 一定 \tag{2.52}$$

となる。

いま，水面の最も低い点Ｃにおいて，$r=0$のとき$z=0$とすると，上式は

$$gz-\frac{1}{2}r^2\omega^2=0 \tag{2.53}$$

この式は，放物線を表す式であり，水の自由表面の断面は放物線であることがわかる。なお，放物線が回転して生じた放物線体の体積は同じ高さ H を有する円筒の体積の半分である。したがって，静止状態の時の水面A_0B_0の位置は，回転したときの最高位置ＡＢと最低点Ｃとの中間にある。

水面の最も低い点Ｃから測ったＭ点の任意の水面の高さzは

$$z=\frac{r^2\omega^2}{2g} \tag{2.54}$$

また，水面の最も高い位置ＡＢと最も低い点Ｃとの垂直距離 H は，上式で $z=H$，$r=r_0$とおくと

$$H=\frac{r_0^2\omega^2}{2g} \tag{2.55}$$

となる。

［例題 2.14］ 図 2.28 において，内径 0.8m，深さ 1.8m の円筒容器内の水が中心軸まわりに $n=80$rpm の速さで回転している。最初に静止状態にあった時の水が容器の上縁まで満たされていたとして，上記の回転数に達したとき，次の問に答えよ。

(a)角速度ωを求めよ。(b)水面の最高位置ＡＢと最低点Ｃとの距離Hを求めよ。(c)上記の回転数に達したとき，容器の外へ放出された水の重量W_p(kN)と容器に残された水の重量W(kN)を求めよ。ただし，水の密度$\rho=1000$ kg/m^{3}とする。

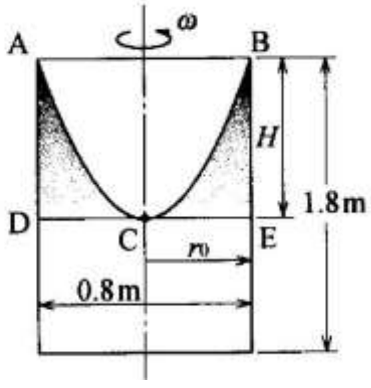

図 2.28　回転容器内の水の運動

［解］（a）角速度ωは，回転数nとの関係より

$$\omega=\frac{2\pi n}{60}=\frac{2\pi\times 80}{60}=8.378\ \mathrm{rad/s}$$

（b）距離Hは式（2.55）より

$$H=\frac{r_0{}^2\omega^2}{2g}=\frac{0.4^2\times 8.378^2}{2\times 9.8}=0.573\ \mathrm{m}$$

（c）遠心力のために容器の外へ放出された水の量は，放物線体ＡＣＢの体積V_pと等しく，その体積V_pは，それを含む円筒ＡＤＣＥＢの体積の半分に等しい。

放物線体の体積V_pは

$$V_p=\frac{1}{2}\left(\pi r_0{}^2\times H\right)=\frac{1}{2}\left(\pi\times 0.4^2\times 0.57\right)=0.143\ \mathrm{m^3}$$

したがって，外へ放出された水の重量W_pは

$$W_p=\rho g V_p=1000\times 9.8\times 0.143=1401.4\ \mathrm{kg\cdot m/s^2}\fallingdotseq 1.4\ \mathrm{kN}$$

次に，最初に器が水で満たされていたときの水の体積V_0は

$$V_0=\pi r_0{}^2\times 1.8=\pi\times 0.4^2\times 1.8=0.905\ \mathrm{m^3}$$

容器の中に残っている水の体積Vは

$$V=V_0-V_p=0.905-0.143=0.762\ \mathrm{m^3}$$

したがって，容器に残された水の重量Wは

$$W=\rho g V=\rho g\left(V_0-V_p\right)=1000\times 9.8\times 0.762=7467.6\ \mathrm{kg\cdot m/s^2}\fallingdotseq 7.47\ \mathrm{kN}$$