流体の力学　基礎編

2.3　重力場にある静止流体　その2

（ａ．液体の深さと圧力の関係）

（ｂ．アルキメデスの原理）

ｃ．平面壁に及ぼす液体の力

ｄ．曲面壁に及ぼす液体の力　$\Big\}$ その２

＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊

2.3　重力場にある静止流体　その2

ｃ．平面壁に及ぼす液体の力

平面壁に及ぼす力の積算は，ダムなどの壁面の強度設計に必要である。図 2.18 に示すように，静止液体中に平面壁が角度 θ で斜めに取り付けられている時の平面壁に及ぼす全圧力とその作用点を考える。

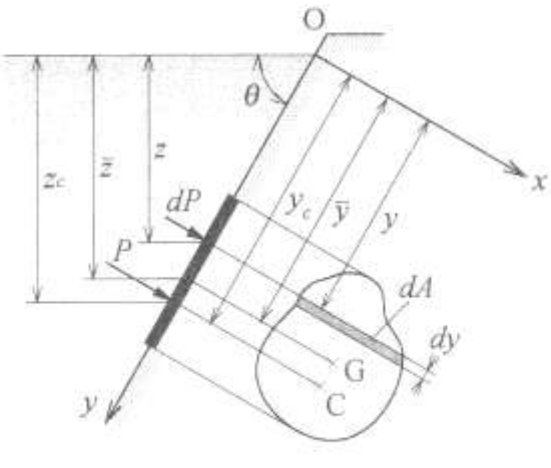


図 2.18　平面壁に及ぼす全圧力

液面との交線を Ox 軸，これに直角に Oy 軸をとる。深さ z における平面壁の微小面積 dA に及ぼす全圧力 dP は

$$dP = pdA = \rho gzdA$$

$$\therefore P = \rho g \int zdA = \rho g \sin\theta \int ydA \qquad (2.25)$$

幾何学的な重心の定義より

$$\int ydA = \bar{y}A \tag{2.26}$$

したがって，平面壁に及ぼす全圧力は

$$\therefore P = \rho g \sin\theta \int ydA$$

$$= \rho g \sin\theta \cdot \bar{y}A$$

$$= \rho g \bar{z}A \tag{2.27}$$

となる。ここに，z は液面からの重心（図心）Gまでの距離である。したがって，平面壁に作用する液体の全圧力は，重心での圧力と平面壁の面積の積で求められる。

つぎに，この全圧力の作用点である**圧力中心**(center of pressure)の位置Cを求める。Ox 軸まわりの全圧力 dP の平面壁全体のモーメント $\int ydP$ と全圧力 P のモーメント $y_c P$ は等しいので

$$y_c P = \int ydP \tag{2.28}$$

$$y_c = \frac{\int ydP}{P}$$

$$\therefore y_c = \frac{\rho g \sin\theta \int y^2 dA}{\rho g \sin\theta \int ydA} = \frac{\int y^2 dA}{\int ydA} \tag{2.29}$$

ここで，$\int ydA = y\ A$，また，$\int y^2 dA$ は平面壁の Ox 軸まわりの**慣性モーメント**（断面二次モーメント moment of inertia，or second moment of area）である。重心Gを通り Ox 軸に平行な軸まわりの慣性モーメントを I_G とすると

$$\int y^2 dA = I_G + A\bar{y}^2 \tag{2.30}$$

となる。また，重心を通る Ox 軸まわりの平面壁の**回転半径**(radius of gyration)を k_G とすると $I_G = k_G{}^2 A$ となる。したがって，圧力中心の位置Cの Oy 軸に沿った水面からの距離 y_C は

$$y_C = \frac{I_G + A\bar{y}^2}{\bar{y}A} = \bar{y} + \frac{I_G}{\bar{y}A} = \bar{y} + \frac{k_G{}^2}{\bar{y}} \tag{2.31}$$

となる。

［例題 2. 9］ 図 2. 19 に示す幅 b＝1. 5m，高さ h＝3m の長方形の垂直仕切水門に作用する全圧力 P と圧力中心の位置 y_C を求めよ。

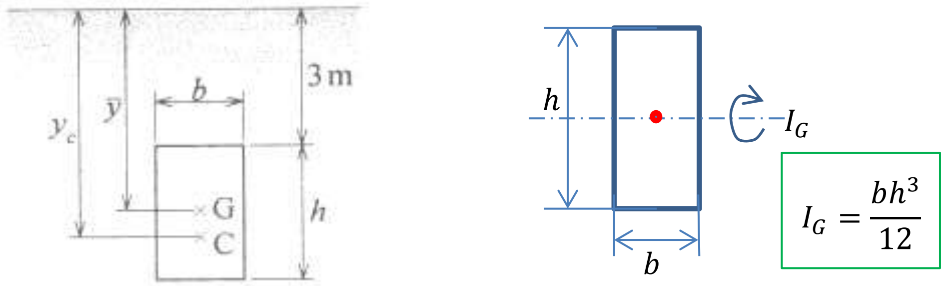


図 2.19　垂直仕切水門に作用する力

［解］ 今，式(2. 27)において，sin θ ＝sin90° ＝1，y ＝z となるから，全圧力Pは

$$P = \rho g\ z\ A = 1000 \times 9.8 \times 4.5 \times 1.5 \times 3$$
$$= 198450\ \ \mathrm{kg \cdot m/s^2} = 198.45\ \mathrm{kN}$$

圧力中心の位置 y_C は，式(2. 31)において，長方形の重心Gを通る慣性モーメント I_G は，I_G＝$bh^3/12$，面積 A＝bh，また，y_C＝z_C であるから

$$y_C = z_C = \bar{y} + \frac{I_G}{\bar{y}A}$$
$$= \bar{y} + \frac{bh^3/12}{\bar{y}bh}$$
$$= \bar{y} + \frac{h^2}{12\bar{y}}$$
$$= 4.5 + \frac{3^2}{12 \times 4.5}$$
$$= 4.67\ \ \mathrm{m}$$

［例題 2. 10］ 図 2. 20 に示す水深 H，幅 B の垂直な堰堤に作用する全圧力 P は，P＝ $\rho g \times (H^2B/2)$，また，圧力中心の位置は，底面から $H/3$ にあることを証明せよ。

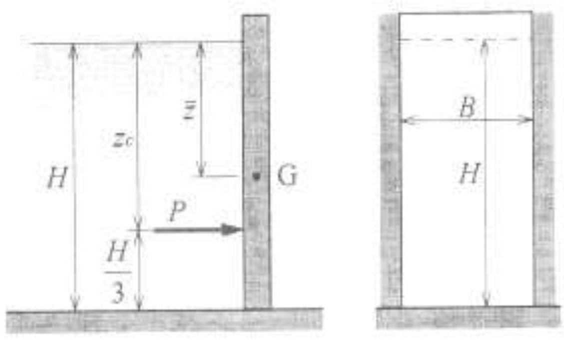


図 2.20　堰堤に作用する力

［解］ 全圧力 P は式(2.27)において，$\bar{z}=H/2$，$A=H\times B$ であるから

$$P=\rho g\bar{z}A=\rho g\times\frac{H}{2}\times H\times A=\rho g\frac{H^2B}{2}$$

また，圧力中心の位置 y_c は，式(2.31)において，$y_C=z_C$，$y=z$，また，重心G を通る慣性モーメント I_G は，$I_G=BH^3/12$ であるから

$$y_C=z_C=\bar{y}+\frac{I_G}{\bar{y}A}$$

$$=\frac{H}{2}+\frac{BH^3/12}{(H/2)\times H\times B}$$

$$=\frac{2H}{3}$$

したがって，圧力の中心の位置は，底面から

$$H-\frac{2H}{3}=\frac{H}{3}$$

の位置となる。証明終わり。

［例題 2.11］ 図 2.21 に示すように，中心軸のまわりに回転できる円形弁で，内径 80cm の水平管を流れる水量を調整している。円形弁の中心と水面との距離 $\bar{z}$ ＝2.4m のとき，円形弁に作用する全圧力 P と圧力の中心 z_c を求めよ。

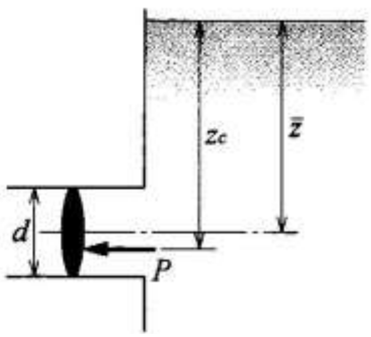
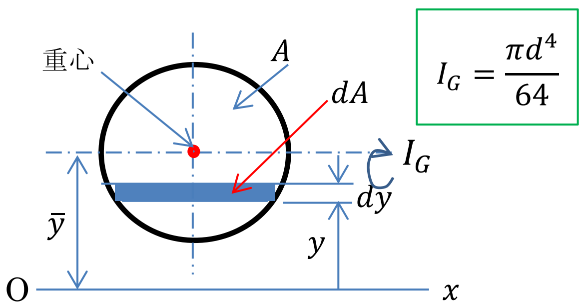


図 2.21　円形弁に作用する力



［解］ 式(2.27)より，全圧力Ｐは

$$P = \rho g \bar{z} A = 1000 \times 9.8 \times 2.4 \times \frac{\pi \times 0.8^2}{4}$$

$$= 11822\ \mathrm{kg}\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}} = 11822\ \mathrm{N}$$

圧力中心の位置 y_Cは，式(2.31)において，円形の場合の重心Gを通る慣性モーメント I_Gは，$I_G = \pi d^4/64$，$A = \pi d^4/4$，また，$y_C = z_C$であるから

$$y_c = z_c = \bar{y} + \frac{I_G}{\bar{y}A}$$

$$= \bar{y} + \frac{\pi d^4/64}{\bar{y} \cdot \pi d^2/4}$$

$$= \bar{y} + \frac{d^2}{16\bar{y}}$$

$$= 2.4 + \frac{0.8^2}{16 \times 2.4}$$

$$= 2.42\ \mathrm{m}$$

ｄ．曲面壁に及ぼす液体の力

図 2.22 に示すように，静止液体中の曲面壁に及ぼす力を考える。曲面壁は二次曲面とし，液面より z の位置に微小面積 dA をとり，この微小面に作用する微小全圧力を dP とする。dP の水平成分と鉛直成分の力をそれぞれ dP_H，dP_V として，これらの成分の力より二次曲面壁に及ぼす液体の全圧力を求める。

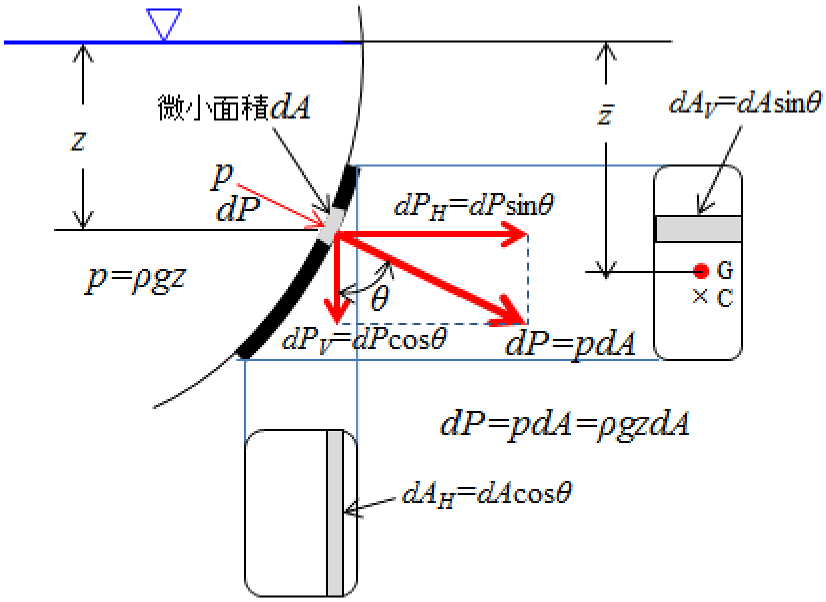


図2.22　曲面壁に及ぼす全圧力

水平成分 dP_H，鉛直成分 dP_V の力は

$$dP_H = dP\sin\theta = \rho gzdA\sin\theta = \rho gzdA_V \tag{2.32}$$

$$dP_V = dP\cos\theta = \rho gzdA\cos\theta = \rho gzdA_H \tag{2.33}$$

となる。ここで，dA_V，dA_H は，それぞれ微小面積 dA を鉛直および水平面に投影した面積である。以上の式を曲面 A-B 全体について積分すると，全圧力 P の水平成分 P_H と鉛直成分 P_V が求まる。

水平分力 P_H は

$$P_H = \int dP_H = \rho g\int zdA_V = \rho g\bar{z}A_V \tag{2.34}$$

となる。ここで，$\bar{z}$ は液面と面積 A_V の平面の重心Ｇとの距離である。したがって，二次曲面壁に作用する全圧力 P の水平分力 P_H は，この曲面を鉛直面に投影した断面積 A_V に作用する全圧力に等しく，その作用点Ｃは投影面積の圧力の中心点を通り，中心点は平面壁の場合と同様にして求められる。

鉛直分力 P_V は

$$P_V=\int dP_V=\rho g\int z dA_H=\rho g\int dV=\rho gV \tag{2.35}$$

となる。ここで dV は高さ z，微小面積 dA の微小液柱体の体積，V は二次曲面壁の上方にある液体の体積を示す。したがって，二次曲面壁に作用する全圧力 P の鉛直分力 P_Vは，この曲面壁の上方にある液体の液面までの重量に等しく，その作用線は液体重量の重心を通る。

結局，二次曲面に作用する全圧力 P は，水平分力 P_Hと鉛直分力 P_Vより

$$P=\sqrt{P_H{}^2+P_V{}^2} \tag{2.36}$$

で求められる。

［例題 2.12］図 2.23 は，　水量を調整するためのテインターゲート（taintor gate)と呼ばれる水門である。水門扉の断面はOを中心とする円弧であり，水は下端Eと堰堤の間から流出する。いま，図に示す寸法の水門が閉じたとして，1ｍ幅の扉に作用する全圧力 P の水平分力 P_Hと垂直分力 P_V, および全圧力 P を求めよ。また，これらの分力の作用線の位置，すなわち P_Hの水面からの作用線の深さC_VC（圧力の中心 y_C），および P_Vの作用線とOC_H線との水平距離CC_Hを求めよ。

図 2.23

［解］水平分力 P_Hは，式(2.27)より

$$P_H=\rho g\bar{z}A=1000\times 9.8\times \frac{3}{2}\times(3\times 1)=44100\ \mathrm{N}$$

P_Hの作用線の深さC_VC，すなわち圧力の中心 y_cは，式(2.31)あるいは例題 2.10 より

$$y_C=\overline{C_VC}=\frac{2}{3}\times 3=2\ \mathrm{m}$$

となる。

次に垂直分力P_Vは，面積ＤＥＦと幅1mを乗じた体積の水の重量に等しい。したがって，面積ＤＥＦの面積は，扇形ＯＤＥから三角形ＯＦＥの面積を引いた残りである。円弧の半径をrとすると，式(2.35)より

$$P_V=\rho gV=\rho g\left\{\left(\frac{30}{360}\times\pi r^2\right)-\frac{1}{2}\times(r\cos 30^\circ\times 3)\right\}$$

$$=1000\times 9.8\times\left\{\left(\frac{30}{360}\times\pi\times 6^2\right)-\frac{1}{2}\times\left(6\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times 3\right)\right\}=15974\ \mathrm{N}$$

となる。

なお，円弧扉の各点における水圧は，その面に直角に作用する。したがって，その合成圧力，すなわち，P_VとP_Hの合成圧力Pは，円弧の中心Ｏを通る軸線上の一点に向かわなければならない。P_Vの作用線とOC_H線との水平距離CC_Hは三角形の相似から，$C_VC : CC_H = P_V : P_H$

$$\therefore \overline{CC_H}=\overline{C_VC}\times\frac{P_H}{P_V}=2\times\frac{44100}{15974}=5.52\ \mathrm{m}$$