流体の力学　基礎編

2.3　重力場にある静止流体

ａ．液体の深さと圧力の関係

ｂ．アルキメデスの原理

（ｃ．平面壁に及ぼす液体の力）

（ｄ．曲面壁に及ぼす液体の力）

＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊

2.3　重力場にある静止流体

ａ．液体の深さと圧力の関係

重力のみを受けている静止流体中での，鉛直方向の圧力変化を求めてみよう。いま，図 2.13 に示すように，静止流体中に断面積 A，高さ z の微小な流体の円柱を考える。高さ z は基準水平面から鉛直上方にとる。高さ z の円柱下面に作用する圧力を p とすると， $z+dz$ の位置にある円柱上面に作用する圧力は $p+(dp/dz)dz$ となる。流体の密度を ρ **とすると**，微小な流体円柱の重量は， $\rho gAdz$ で鉛直下向（z の負の方向）きに作用する。

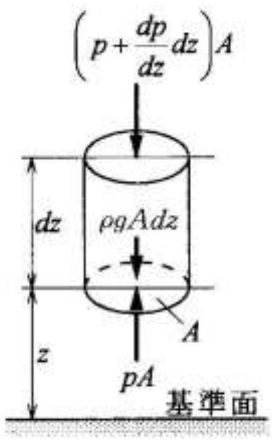

図 2.13　静止流体の圧力と高さ

したがって，流体が静止するためのつり合い条件より

$$pA - \left(p + \frac{dp}{dz}dz\right)A - \rho gAdz = 0$$

したがって

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g \qquad (2.16)$$

となる。

液体の場合には，非圧縮性流体で密度 ρ を一定としてよいので，上式を積分すると

$$p = -\rho g \int dz + C = -\rho gz + C \qquad (2.17)$$

となる。ここで，Ｃは積分定数である。

いま，図 2.14 に示すように，基準面から液面までの高さを z_0，液面に働く圧力を p_a とすると

$$p_a = -\rho g z_0 + C$$

$$\therefore C = p_a + \rho g z_0$$

したがって，式(2.17)は

$$p = p_a + \rho g (z_0 - z)$$

$$= p_a + \rho gh \qquad \text{（絶対圧）} \qquad (2.18)$$

となる。

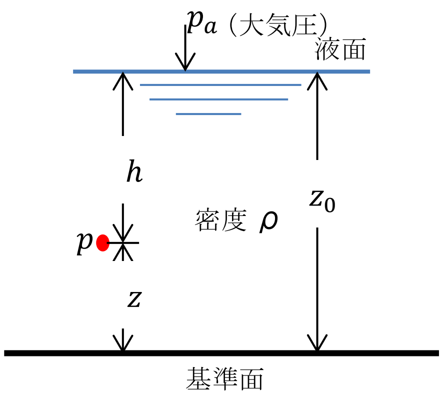

図 2.14　液体の深さと圧力

いま，液面を自由表面とすると p_a は大気圧となり，ゲージ圧で０となるので

$$p = \rho gh \qquad \text{（ゲージ圧）} \qquad (2.19)$$

上式に示すように，一般に，液体中の任意の位置における圧力は，液面からの深さに比例する。あるいは液面の深さ h は

$$h=\frac{p}{\rho g} \tag{2.20}$$

で示され，この h を**圧力ヘッド**(pressure head)，特に水の場合には，**圧力水頭**(pressure head)という。圧力ヘッドの単位は長さのmであり，単位重量の液体を高さ h だけ移動したときの位置エネルギーの変化を意味し，エネルギーの尺度としても用いられる。

海面から高度(altitude)約 11000m までの**対流圏**(troposphere)では，温度は高度とともに直線的に低下し,高度1000mにつき約6.5゜Cづつ温度は低下する。それより約20000mの範囲を**成層圏**(stratosphere)といい，　成層圏内では，約－50゜Cで一定温度である。いま，高度 z における大気の絶対温度を T，海面上($z=0$)における絶対温度を T_0 とすると，上述のことより

$$T=T_0-0.0065z \tag{2.21}$$

となる。高度 z における密度 ρ はそこでの大気圧を p_a とすると，完全気体の状態方程式(1.3)より

$$\rho=\frac{p}{RT}=\frac{p_a}{R(T_0-0.0065z)}$$

となる。式(2.16)より，$\rho=-(1/g)(dp_a/dz)$ であるから，上式に代入して変数分離形にすると

$$\frac{dp_a}{p}=-\frac{gdz}{R(T_0-0.0065z)}$$

となる。両辺を積分して $z=0$ において $p=p_0$ とすると

$$\ln\frac{p_a}{p_0}=\frac{g}{0.0065R}\ln\left(\frac{T_0-0.0065z}{T_0}\right)$$

となる。乾いた空気の気体定数は，$R=287\mathrm{J/(kg\cdot K)}=287\mathrm{m^2/(s^2\cdot K)}$ であるから，$R/g=29.27\mathrm{m/K}$，$g/(0.0065R)=5.256$ となる。したがって，高度 z における大気圧 p_a と海面上($z=0$)の圧力 p_0 との比は

$$\frac{p_a}{p_0}=\left(1-\frac{0.0065z}{T_0}\right)^{5.256} \tag{2.22}$$

となり，海面上の大気圧 p_0 と絶対温度 T_0 がわかると，高度 z における大気圧 p_a がこの式より求められる。

［例題 2.5］海水を非圧縮性と仮定し，深さ 9945ｍの太平洋の海底における圧力を求めよ。ただし，海水の密度 $\rho=1040\mathrm{kg/m^3}$ とする。

［解］式(2.19)より

$$p=\rho gh=1040\times9.8\times9945=101.3\times10^6\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m^2}}=101.3\ \mathrm{MPa}$$

［例題2.6］海抜8848mの無風状態でのエベレスト山頂における大気圧を求めよ。ただし，海面上の大気圧を 101.3kPa，気温を 15゜C とする。

［解］式(2.22)より

$$p_a=p_0\left(1-\frac{0.0065z}{T_0}\right)^{5.256}=101.3\times10^3\left(1-\frac{0.0065\times8848}{273+15}\right)^{5.256}$$

$$=101.3\times10^3\times0.8^{5.256}=31.35\times10^3\,\mathrm{Pa}$$

ｂ．アルキメデスの原理

液体や気体などの流体中に物体が浮かぶことができる原理をアルキメデス(287-212 B.C)が発見した。静止流体中の物体には，その表面に垂直に圧力が作用するが，この圧力の鉛直成分の圧力差によって物体は鉛直上向きの力を受ける。この力を**浮力**(buoyancy)と呼び，物体が排除した体積の流体の重量に等しい力を受ける。言い換えると，流体中の物体は浮力の大きさに相当する分だけ重量が減少することになる。これを**アルキメデスの原理**(Archimedes’ principle)という。いま，図 2.15 に示すように，密度 ρ の流体中に体積Ｖの物体が浸っている。

微小断面積 dA の鉛直な柱状で切り取られる物体表面の面積を dA_1，dA_2，深さを h_1，h_2，圧力を p_1，p_2 とする。dA_1，dA_2 に作用する全圧力は，p_1dA_1，p_2dA_2 であり，その鉛直方向の分力は，$p_1dA=\rho gh_1dA$，$p_2dA=\rho gh_2dA$ である。この微小柱状体に作用する鉛直上向きの成分 dF は

$$dF=p_2dA-p_1dA=\rho g(h_2-h_1)dA=\rho ghdA=\rho gdV$$

である。物体全体についての力は

$$F=\int_V dF=\rho g\int_V dV=\rho gV \qquad (2.23)$$

となる。この力 F が浮力である。

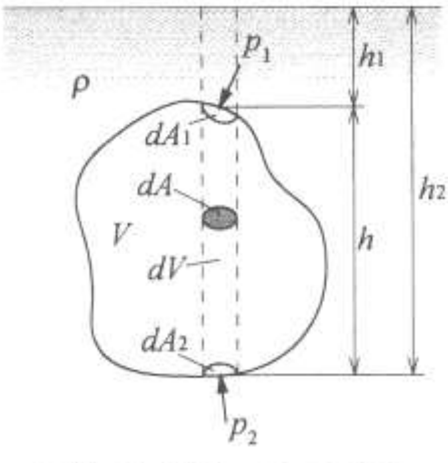

図 2.15　物体の受ける浮力

図 2.16 に示すように，浮力によって水面に浮かぶ物体を**浮揚体**(floating body)という。

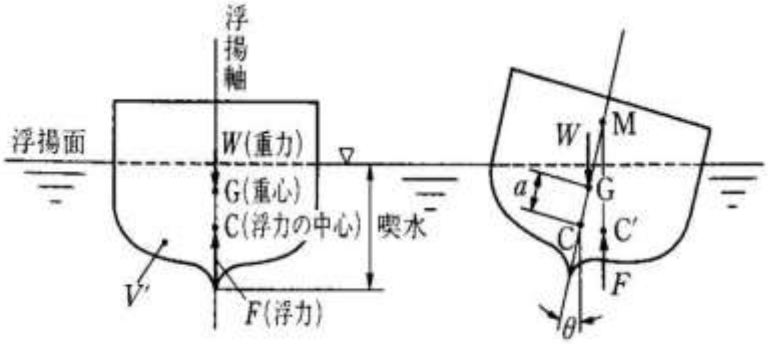

図 2.16 浮揚体（船体の安定性）

浮力の作用点Cを**浮力の中心**(center of bouyancy)といい，この点は浮揚体により水が排除された空間の重心と一致する。浮力 F と浮揚体の重量 W は等しく，浮揚体の重心Gと浮力の中心Cは，一直線上にある。浮揚体の重心Gと浮力の中心Cを結ぶこの鉛直線を**浮揚軸**(axis of floataion)，水面による浮揚体の切断面を**浮揚面**(floating surface)，浮揚面から浮揚体の最下部までの距離を**きっ水**(draft)という。$F < W$ のときには浮揚体は沈下し，$F > W$ のときには上昇する。浮揚体の浮力 F は

$$W = F = \rho g V' \tag{2.24}$$

となる。ただし，V'は物体の排除した体積で**排水体積**という。また，$\rho g V'$ を**排水重量**または**排水量**という。

[例題 2.7] 密度 $\rho = 1025\mathrm{kg/m^3}$ の海水に比重 $s = 0.86$ の氷が浮かんでいる。氷の海面上の体積が $50\mathrm{m^3}$ のとき，この氷の全重量 W を求めよ。

[解] 氷の密度を ρ_0，全体積を V とすると,海中に没している氷の体積 V' は

$$V' = V - 50 = W/(\rho_0 g) - 50 = W/(s \cdot \rho_w g) - 50$$

氷の浮力 F は，式(2.24)より $F = \rho g V'$ である。今，氷に作用する浮力 F と氷の全重量 W は等しく，$F = W$ であるから

$$W = \rho g V' = \rho g \times \left(\frac{W}{s \rho_w g} - 50 \right)$$

$$= \frac{\rho W}{s \rho_w} - 50 \times \rho g$$

$$= \frac{1025 \times W}{0.86 \times 1000} - 50 \times 1025 \times 9.8$$

$\therefore W = 2617788\ \mathrm{N} = 2618\ \mathrm{kN}$

[例題 2.8] 図 2.17 は,液体の比重測定に用いられるボーメの比重計(hydrometer)で，比重計の重量が W，棒状部の断面積が a である。これを密度 ρ_0 の液体に浮かせ，液面と一致する点に標線Ａを記入する。次に，密度 ρ の液体に浮かせたとき液面と一致する点がＢであったとすると，標線Ａ－Ｂ間の距離 h は，次式で示されることを証明せよ。

$$h = \frac{W}{a} \left(\frac{1}{\rho g} - \frac{1}{\rho_0 g} \right)$$

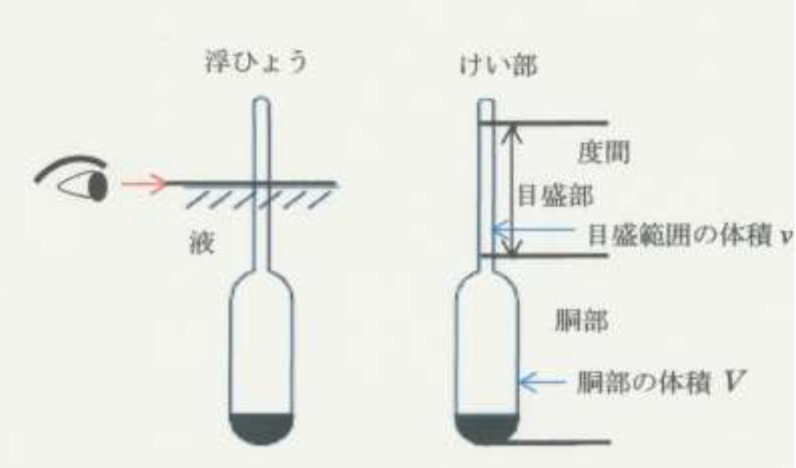

図 2.17 ボーメの比重計

［解］密度ρ_0の液体に浮かせたときの標線Aより下部の比重計の体積をVとすると，比重計の重量と浮力は等しいから式(2.24)より

$$W=\rho_0 gV \tag{a}$$

次に，密度ρの液体の場合には，体積が$V'=a\times h$だけ増加したことになるので

$$W=\rho gV+\rho gV'=\rho g(V+ah) \tag{b}$$

式(a)より，$V=W/(\rho_0 g)$であるから，これを式(b)に代入して

$$W=\rho g\left(\frac{W}{\rho_0 g}+ah\right)$$

$$\therefore h=\frac{W}{a}\left(\frac{1}{\rho g}-\frac{1}{\rho_0 g}\right)$$

一般的に，比重計ではρ_0の液体として比重$s=1.00$の水を用い，標線Aの位置に1.00と目盛る。