流体の力学　基礎編

目　次

流体の力学　基礎編

＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊

２．静止流体の力学

2.1　流体にはたらく力と応力

流体にはたらく力には，**体積力**（body force）と**表面力**（surfacce force）がある。体積力は流体の加速度による慣性力や重力のような外力によって流体に作用する力であり，流体の体積や質量に比例するので，**質量力**（body force）ともいう。 なお，流体が運動している場合には，隣接する流体面に平行で大きさが等しく，方向が逆向きの接線方向の力が作用する。このような力を表面力といい，力は面積に比例する。 また，表面力には流体面に垂直に作用する法線方向の力もあり，流体が静止している場合には，接線方向の力がゼロとなるので流体面には法線方向の力のみが作用することになる。単位面積に及ぼす力を応力（stress）といい，この応力は**法線応力**（normal stress）と**接線応力**（tangential stress）に分類される。

2.2　圧力とその特性

ａ．圧力とは

静止流体中にある壁面，または静止流体中に仮想した面には， その面に垂直な流体力が作用する。単位面積あたりに作用するこの力を**圧力の強さ**（intensity of pressure），または単に流体の**圧力**（pressure）という。

静止流体中において，任意の点を含む微小平面の面積をΔAとし，これに作用

する流体力を ΔF とすると

$$p = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} \tag{2.1}$$

この p が流体の圧力であり，面に垂直に作用する。いま，面積 A の平板に働く流体力が場所によって異なり，その合計が F の場合には

$$\bar{p} = \frac{F}{A} \tag{2.2}$$

となり，p を面積 A に働く流体の**平均圧力**（mean pressure），F を**全圧力**（total pressure）という。

b．圧力の等方性

静止流体中においては，流体中の各点の圧力はすべての方向に等しい。すなわち，圧力は位置のみによって定まり，方向には無関係であるという重要な特性がある。これを**圧力の等方性**（isotropy of pressure）という。このことを力のつり合いから証明してみよう。いま，静止流体中に図 2.1 に示すような重さのない微小な直角三角柱を考える。

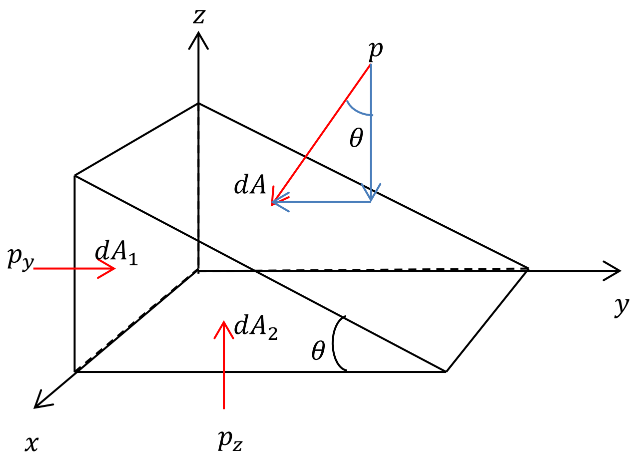

図 2.1　静止流体中の圧力

各微小面 dA_1，dA_2，dA に作用する圧力をそれぞれ p_y，p_z および p とする。いま外力として，例えば重力が作用していないので，y，z 方向の力のつり合いを考えると

$$p_y dA_1 = p\,dA \sin\theta \ , \qquad p_z dA_2 = p\,dA \cos\theta$$

ここで　$dA_1 = dA\sin\theta$ ，$dA_2 = dA\cos\theta$ であるから

$$\therefore p_y = p_z = p$$

となる。このことより，圧力は方向には無関係であることがわかる。なお，流体に重力などの外力が作用するときでも圧力の等方性は成り立つ。

ｃ．パスカルの原理

密閉容器内で静止している液体の任意の点の圧力を増加させると，他のすべての点の圧力も同じ大きさだけ増加する。すなわち，密閉容器内の静止している液体の一部に加えた圧力は，液体のすべての部分にそのままの強さで伝わる。これを**パスカルの原理**（Pascal's principle）という。パスカルの原理を応用したものに，図 2.2 に示す**水圧機**（hydraulic press）がある。

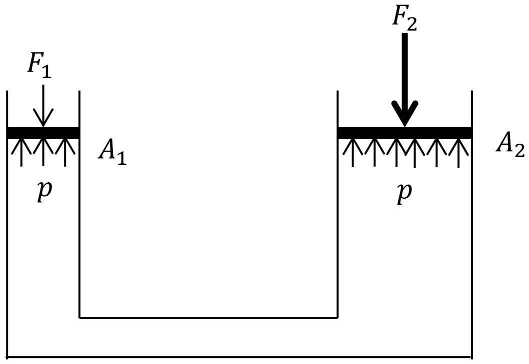

図 2.2　水圧機の原理

ピストンの断面積を A_1，A_2 とし，ピストンに加わる力をそれぞれ F_1，F_2 とする。それぞれのピストン面に作用する圧力は等しく，$p = F_1/A_1$，$p = F_2/A_2$ であるから

$$F_2 = F_1 \frac{A_2}{A_1} \tag{2.3}$$

となる。したがって，断面積 A_2 を A_1 よりも十分大きくすることにより，小さな力 F_1 で大きな力 F_2 を発生させることができる。

ｄ．圧力の表示

１）圧力の単位

圧力の単位は，SI 単位では Pa（パスカル）で表示されるが，　単位面積当たりの力を意味するのでＮ（ニュートン）を用いると N/m^2 となる。　工学単位では kgf/cm^2 の単位が使用されるが，水柱 mmH_2O，水銀柱 mmHg などの液柱の高さでも表

される。標準大気の圧力，すなわち緯度 45 ゜の海面上における０゜ C，760mmHg の水銀柱の高さに等しい大気の圧力を**標準気圧**といい，atm の記号で，またこれに対し，工学単位の kgf/cm^{2}を**工学気圧**といい， at の記号で表す。これらの圧力の関係は

1 Pa　　 ＝1 N/m^2
1 kgf/cm^2 ＝9.80665×10^4 Pa
1 mmHg　 ＝1.33322×10^2 Pa＝1 Torr(トル　真空工学で使用)
1 mmH$_2$O　＝9.80665 Pa

また

標準気圧　1 atm＝760mmHg(0゜C, g＝980.665cm/s^2, 水銀の比重＝13.595)
　　　　　　　＝1.0133×10^{5}N/m^2＝101.33×10^{3}Pa＝101.33kPa
　　　　　　　＝1.0332kgf/cm^2＝10.332mH$_2$O(4゜C)
工学気圧　1 at＝１kgf/cm^2＝10mH$_2$O(4゜C)≒98.07kPa≒735.6mmHg(0゜C)

２）絶対圧とゲージ圧

圧力には、完全な真空状態を基準とした**絶対圧**(absolute pressure)と大気圧を基準とした**ゲージ圧**(gauge pressure)がある。図 2.3 に大気圧よりも高いA点の圧力と低いＢ点の圧力の関係を示す。一般的には，ゲージ圧がよく用いられており，特に，大気圧よりも低い場合のゲージ圧を**真空圧**（真空計の読み：正の表示）とも呼ぶ。

絶対圧＝大気圧＋ゲージ圧
ゲージ圧＝絶対圧－大気圧
絶対圧＝大気圧－真空圧

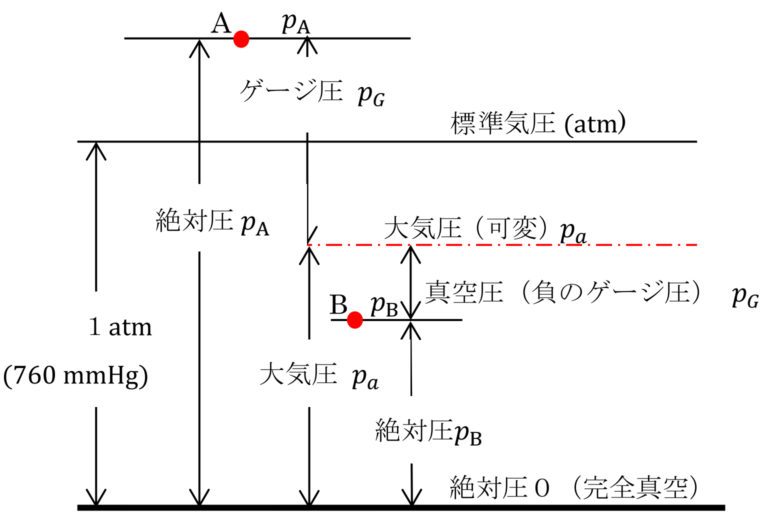

図 2.3　絶対圧とゲージ圧との関係

［例題 2.1］ 次の単位を SI 単位に換算せよ。

(1)3.5 kgf/cm^2　(2)250 kgf/cm^2　(3)55.4 mmHg　(4)360 mmH_2O

［解］ (1) 3.5 kgf/cm^2＝3.5×9.8×10^4 Pa＝343×10^3 Pa＝343kPa

(2) 250 kgf/cm^2＝250×9.8×10^4 Pa＝2450×10^4 Pa＝24.5 MPa

(3) 55.4 mmHg＝55.4×1.33×10^2 Pa＝73.68×10^2 Pa＝7.368 kPa

(4) 360 mmH_2O＝360×9.8 Pa＝3528 Pa＝3.528 kPa

ｅ．圧力の計測

１）マノメータ

流体の圧力は，ガラス管内の液柱の高さから簡単に精度よく求めることができる。このような計測器を**液柱計**，または**マノメータ**(manometer)と呼ぶ。

〈ピエゾメータ〉

図 2.4 に示すように，容器内や管内の液体の圧力を測定するのに，一本のガラス管を鉛直に立てると液体がある高さまで上昇する。このような液柱計を**ピエゾメータ**(piezometer)という。いま,容器内の液体の密度を ρ , 大気圧を p_a, 水平面からの液柱の高さを H とすると, A点での圧力 p は，後述する式(2.18)より

$$p = p_a + \rho gH \quad (絶対圧) \tag{2.4}$$

となる。

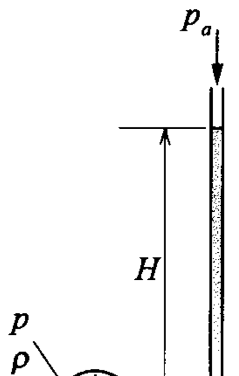

図 2.4　ピエゾメータ

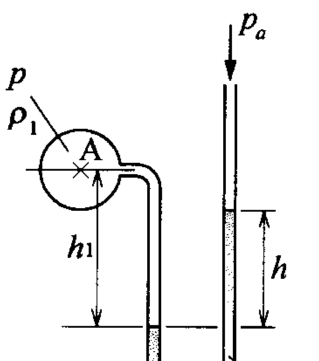

図 2.5　U 字管マノメータ

〈U字管マノメータ〉

図 2.5 に示す容器内のＡ点の圧力 p は，**U 字管マノメータ**(U-tube manometer)を用いると，圧力と高さの関係式(2.18)より

$$p+\rho_1 gh_1=p_a+\rho gh$$

$$p=p_a+\rho gh-\rho_1 gh_1 \quad (\text{絶対圧}) \tag{2.5}$$

となる。大気圧との圧力差をとると

$$p-p_a=\rho gh-\rho_1 gh_1 \quad (\text{ゲージ圧}) \tag{2.6}$$

となる。

容器内の流体が気体の場合には，$\rho_1 \ll \rho$ であるから

$$p-p_a=\rho gh \tag{2.7}$$

〈示差マノメータ〉

二点間の圧力差を求めるものを**示差マノメータ**(differential manometer)という。図 2.6 に示す管路内の二点Ａ，Ｂでの圧力差 p_1-p_2 は

$$p_1+\rho_1 gh_1=p_2+\rho_2 g(h_2-h)+\rho gh$$

$$\therefore\ p_1-p_2=\rho gh+\rho_2 g(h_2-h)-\rho_1 gh_1 \tag{2.8}$$

特別の場合として，$h_1=h_2$，$\rho_1=\rho_2=\rho_0$ の時には

$$p_1-p_2=(\rho-\rho_0)gh \tag{2.9}$$

となる。

なお，管路内の流体が両方とも気体の場合には，$\rho_0 \ll \rho$ であるから

$$p_1-p_2=\rho gh \tag{2.10}$$

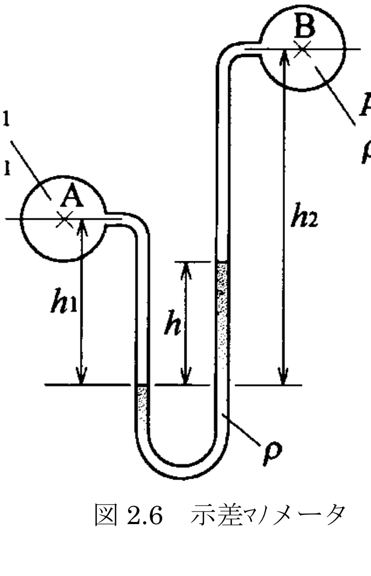

図 2.6　示差ﾏﾉﾒｰタ

〈逆Ｕ字管マノメータ〉

圧力差が小さい場合には，Ｕ字管を逆にして測定する。図 2.7 においてＡ点とＢ点の圧力差は

$$p_1 - \rho_1 g h_1 = p_2 - \rho_2 g h_2 - \rho g h$$

$$\therefore\ p_1 - p_2 = \rho_1 g h_1 - \rho_2 g h_2 - \rho g h \qquad (2.11)$$

$\rho_1 = \rho_2 = \rho_0$の場合には

$$p_1 - p_2 = (\rho_0 - \rho) g h \qquad (2.12)$$

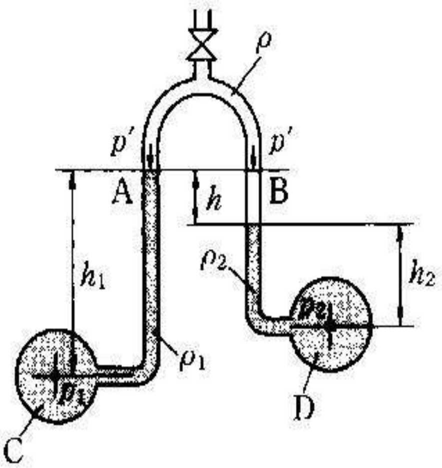

図 2.7　逆Ｕ字管マノメータ

〈微圧計〉

測定する圧力が比較的小さいときには，図 2.8 に示すような**傾斜微圧計**　(inclined micromanometer)を用いる。タンクの断面積を A，ガラス管の断面積を a とし，圧力 p によってタンク内の液面が Δh だけ下がり，ガラス管の液面がガラス管に沿って l だけ上がったとすると， $\Delta h \cdot A = a \cdot l$ であるから

$$\Delta h = \frac{a}{A} l \qquad (2.13)$$

いま，液体の密度を ρ とすると

$$p = p_a + \rho g (h + \Delta h) \qquad (2.14)$$

となる。ここで，$h = l \sin\alpha$ であるから，これらの式から

$$p - p_a = \rho g l \left(\sin\alpha + \frac{a}{A} \right) \qquad (2.15)$$

となり，傾斜角度 α を小さくするほど l が大きくなり感度がよくなる。

ふつう $\sin\alpha = 1/10$ 程度までである。ここで、一般に $a \ll A$ であるので、$a/A \cong 0$ としてよい。

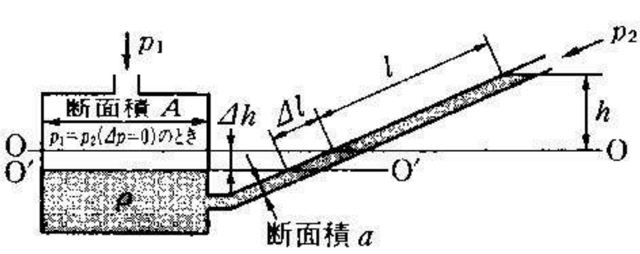

図 2.8　傾斜微圧計

２）ブルドン管圧力計

図 2.9 に，ブルドン管圧力計(Bourdon tube pressre gauge)を示す。だ円形の断面をもつ弾性体のブルドン管に作用する圧力を，リンクと歯車機構によってゲージ圧力を指示するように工夫されており，工業上広く利用されている。

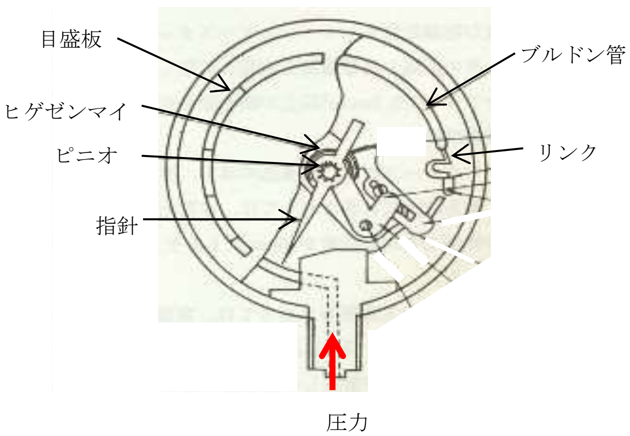

図 2.9　ブルドン管圧力

［例題 2.2］ 図 2.10 に示す気圧計(barometer)の読み H が水銀柱で 760mm であった。このときの大気圧力 p_a を(a)水柱 H_W(cm)，(b)工学単位(kgf/cm^2)，および(c)SI 単位(Pa)で示せ。ただし，水銀の比重を 13.6 とする。

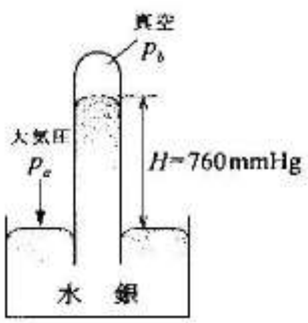

図 2.10　気圧計

［解］(a)後述する式(2.18)より

$$p_a = p_b + \rho gH$$

いま，p_b は水銀の飽和蒸気圧で非常に小さいので近似的に $p_b=0$(トリチェリーの真空と呼ばれている)としてよい。したがって

$p_a = \rho gH = \rho_w gH_w$ の関係と式(1.1)より

$$\therefore\quad H_w = \frac{\rho}{\rho_w}H = sH = 13.6\times 760 = 10336\ \mathrm{mm} = 1033.6\ \mathrm{cm}$$

(b)101.325 kPa，4°C における水の密度 ρ の SI 単位と工学単位には

$$\rho = 1000\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m^3}}\ \text{（SI単位）}$$

$$= \frac{1000}{9.80665}\frac{\mathrm{kgf\cdot s^2}}{\mathrm{m^4}} = 101.97\frac{\mathrm{kgf\cdot s^2}}{\mathrm{m^4}}\ \text{（工学単位）}$$

の関係がある。

したがって，工学単位では

$$p_a = \rho_w gH_w = \frac{1000}{9.8}\left(\frac{\mathrm{kgf\cdot s^2}}{\mathrm{m^4}}\right)\times 9.8\left(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s^2}}\right)\times 10.336(\mathrm{m})$$

$$= 10.336\times 10^3\left(\frac{\mathrm{kgf}}{\mathrm{m^2}}\right) = 1.0336\left(\frac{\mathrm{kgf}}{\mathrm{cm^2}}\right)$$

(c)SI 単位では

$$p_a = \rho_w gH_w = 1000(\mathrm{kg/m^3})\times 9.8(\mathrm{m/s^2})\times 10.336(\mathrm{m})$$

$$= 101.3\times 10^3\ \frac{\mathrm{kg\cdot m}}{\mathrm{s^2}}\frac{1}{\mathrm{m^2}}$$

$$= 101.3\times 10^3\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m^2}} = 101.3\times 10^3\ \mathrm{Pa} = 101.3\ \mathrm{kPa}$$

［例題 2.3］ 図 2.11 に示すように，管路A点での圧力 p_A を測定するために，片方が大気圧 p_a に解放された水銀U字管で測定した。A点の絶対圧力とゲージ圧力を求めよ。ただし，H＝20cm，h_g＝15cm，p_a＝101.3kPa，水銀の密度 ρ_g＝13.6×10^3 kg/m^3 とする。

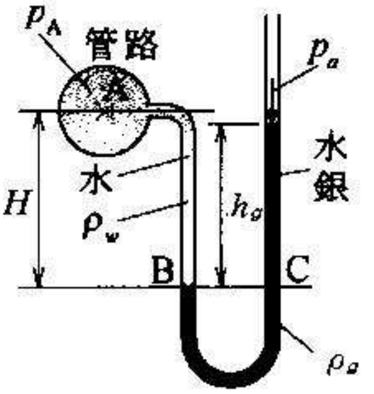

図 2.11　U 字管マノメータ

［解］ 同じ高さの点Bと点Cでの圧力は等しいから，式(2.18)より

$$p_A + \rho_w gH = p_a + \rho_g gh_g$$

したがって，絶対圧力は

$$\therefore\ p_A = p_a + \rho_g gh_g - \rho_w gH$$
$$= 101.3\times10^3 + 9.8\times(13.6\times10^3\times0.15 - 1000\times0.2)$$
$$= 119.3\times10^3\ \mathrm{Pa} = 119.3\ \mathrm{kPa}$$

ゲージ圧力は

$$p_A - p_a = \rho_g gh_g - \rho_w gH$$
$$= 9.8\times(13.6\times10^3\times0.15 - 1000\times0.2)$$
$$= 18.03\times10^3\ \mathrm{Pa} = 18.03\ \mathrm{kPa}$$

［例題 2.4］ 図 2.12 において，管Ａと管Ｂにそれぞれ p_1＝78.4kPa，p_2＝166.6kPa の水圧が作用するとき，Ｕ字管の水銀の高さ h_g を求めよ。

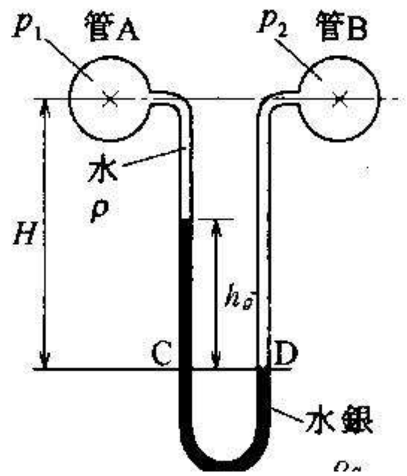

図 2.12　示差マノメータ

［解］ 同じ高さ点Ｃ，Ｄに作用する圧力は等しいから

$$p_1 + \rho g(H - h_g) + \rho_g g h_g = p_2 + \rho g H$$

$$h_g = \frac{p_2 - p_1}{(\rho_g - \rho)g} = \frac{(166.6 - 78.4)\times 10^3}{(13.6\times 10^3 - 1000)\times 9.8} = 0.714 \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m^2}} \frac{1}{\mathrm{kg/m^3}} \frac{1}{\mathrm{m/s^2}}$$

$$= 0.714 \quad \mathrm{m}$$