流体の力学　基礎編

１０．境界層と物体まわりの流れ

＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊

10.5　平板に沿う乱流境界層

平板に沿う流れにおいて，$Re_l > 5\times10^5$ の場合には乱流境界層となる。乱流境界層の速度分布は，円管内乱流の 1/7 乗法則にしたがうと仮定すると，平板の壁面から y の距離における速度 u は

$$u = U\left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7} \tag{10.34}$$

となる。ここで，速度 U は管中心における最大速度に，境界層の厚さ δ は管半径に対応する。

また, 乱流境界層内の壁面摩擦応力 τ_0は，管内乱流の摩擦応力を用いて

$$\tau_0 = C_f\frac{\rho\,\bar{u}^2}{2} = \frac{\lambda}{8}\,\rho\,\bar{u}^2 \tag{10.35}$$

ただし，C_f は摩擦抗力係数，λ は管摩擦係数，u は平均流速である。なめらかな円管に対するブラジウスの式より $\lambda = 0.3164/Re^{1/4}$，また，$u = 0.8u_{max}$ とし，$u_{max} = U$ とおくと

$$\tau_0 = \frac{\lambda}{8}\,\rho\,\bar{u}^2 = 0.0225\,\rho\,U^2\left(\frac{\nu}{U\delta}\right)^{1/4} \tag{10.36}$$

となる。式(10.34)より

$$\frac{u}{U} = f\left(\frac{y}{\delta}\right) = f(\eta) = \eta^{1/7} \tag{10.37}$$

となる。式(10.10)より α は

$$\alpha = \int_0^1 \left(\eta^{1/7} - \eta^{2/7}\right) d\eta = \frac{7}{72} \tag{10.38}$$

これを式(10.11)に代入して

$$\tau_0 = \frac{7}{72}\rho U^2 \frac{d\delta}{dx} \tag{10.39}$$

式(10.36)と(10.39)は等しいので

$$\frac{7}{72}\frac{d\delta}{dx} = 0.0225\left(\frac{\nu}{U\delta}\right)^{1/4} \tag{10.40}$$

$$\therefore \quad \frac{7}{72}\delta^{1/4} d\delta = 0.0225\left(\frac{\nu}{U}\right)^{1/4} dx \tag{10.41}$$

上式より乱流境界層の厚さが求められる。式(10.41)を積分して，$x = 0$のとき$\delta = 0$とすると，積分定数は0となるから

$$\delta = 0.37\left(\frac{\nu}{U}\right)^{1/5} x^{4/5} = 0.37\left(\frac{\nu}{Ux}\right)^{1/5} x = 0.37\frac{x}{Re_x^{\ 1/5}} \tag{10.42}$$

この式より，乱流境界層の厚さは，$x^{4/5}$に比例することがわかる。式(10.42)を(10.36)に代入して

$$\tau_0 = 0.0576\left(\frac{\nu}{Ux}\right)^{1/5} \frac{\rho}{2} U^2 \tag{10.43}$$

となる。長さl，単位幅の平板片面に作用する乱流境界層の摩擦抵抗D_fは

$$D_f = \int_0^l \tau_0 dx = \int_0^\delta \rho U^2 \frac{7}{72} d\delta = 0.072\frac{\rho U^2}{2} l \left(\frac{\nu}{U l}\right)^{1/5} \tag{10.44}$$

摩擦抗力係数C_fは

$$C_f = \frac{D_f}{\rho U^2 l/2} = 0.072\left(\frac{\nu}{U l}\right)^{1/5} = \frac{0.072}{Re_l^{\ 1/5}} \tag{10.45}$$

となる。

$5\times 10^5 < Re_l < 10^7$の領域における実用的な摩擦抵抗$D_f$と摩擦抗力係数$C_f$は，実験結果とよく一致する次の式

$$D_f = 0.074\frac{\rho U^2 l}{2} Re_l^{\ -1/5} \quad \text{（片面，単位幅当り）} \tag{10.46}$$

$$C_f = \frac{0.074}{Re_l^{\ 1/5}} \tag{10.47}$$

がある。

また，$10^6 < Re_l < 10^9$ における乱流境界層の摩擦抗力係数 C_f は，次のシュリヒティング(Schlichting)の式

$$C_f = \frac{0.455}{(\log_{10} Re_l)^{2.58}} \tag{10.48}$$

があり，実験値とよく一致する。以上は，平板の全長にわたって乱流境界層が存在する場合の式である。

なお，乱流境界層の構造は複雑であり，大きくは**内層**(inner layer)と**外層**(outer layer)に分類される。内層は壁面から約40%の範囲内にあり，常時乱れている領域である。壁面近くにはごく薄い層の**層流底層**(laminar sublayer)が見られるが，この層が乱れの原因となっていることから，最近では**粘性底層**（viscous sublayer)と呼ばれている。外層は乱れのない主流と乱流が混在している領域であり，小さな渦と**大規模構造**(large-scale structure)の渦が存在する。

［例題 10.3］ 長さ $l=1$m，幅 $B=0.5$m の薄い平板を温度 20°C の水中で長さ方向に速度 $U=2$m/s で移動させる場合，平板の後端での境界層厚さ δ，摩擦抗力係数 C_f，および平板に作用する全摩擦抵抗 D_f を求めよ。

［解］ 表 1.1 より，水の動粘度 $\nu = 1\times10^{-6}\mathrm{m^2/s}$，密度 $\rho = 1000\mathrm{kg/m^3}$ であるから，まず，レイノルズ数 Re_l は

$$Re_l = \frac{Ul}{\nu} = \frac{2\times1}{1\times10^{-6}} = 2\times10^6 > 5\times10^5$$

したがって，乱流境界層が生じているから，境界層厚さ δ は，式(10.42)より

$$\delta = 0.37\times\frac{x}{Re_x^{1/5}} = 0.37\times\frac{1}{(2\times10^6)^{1/5}} = 0.0203\mathrm{m} = 20.3\mathrm{mm}$$

摩擦抗力係数 C_f は，式(10.47)より

$$C_f = \frac{0.074}{Re_l^{1/5}} = \frac{0.074}{(2\times10^6)^{1/5}} = 0.00406$$

平板の両面に作用する摩擦抵抗 D_f は，式(10.19)より

$$D_f = C_f\frac{\rho U^2}{2}A = 0.00406\times\frac{1000\times2^2}{2}\times1\times0.5\times2 = 8.12\ \mathrm{N}$$

となる。

10.6　遷移を伴う平板の摩擦抵抗

レイノルズ数 Re_l がある程度大きくなると，図 10.1 に示すように，平板の前縁で層流境界層，途中から乱流境界層が存在する。流れが層流から乱流に遷移するときに**遷移領域**(transition region)が存在し，このときのレイノルズ数を**臨界レイノルズ数** Re_c(critical Reynolds number)という。一般的に，$Re_c = U \cdot x / \nu = 3.2\times10^5 \sim 5\times10^5$ で乱流境界層が生じるが，もし，平板上に層流境界層と乱流境界層の二つの境界層が生じる場合には，摩擦抵抗はこれらの和となる。平板上に層流と乱流の二つの境界層が生じる $5\times10^5 < Re_l < 5\times10^6$ の領域では，摩擦抗力係数は，次のプラントルの式

$$C_f = \frac{0.074}{Re_l^{1/5}} - \frac{A}{Re_l} \qquad (10.49)$$

あるいは，式(10.48)を用いた次のプラントル・シュリヒティングの式

$$C_f = \frac{0.455}{(\log_{10} Re_l)^{2.58}} - \frac{A}{Re_l} \qquad (10.50)$$

がある。ただし，$Re_l = 3\times10^5$ で $A = 1050$，$Re_l = 5\times10^5$ で $A = 1700$，$Re_l = 10^6$ で $A = 3300$，$Re_l = 3\times10^6$ で $A = 8700$ である。平板上で境界層が層流から乱流に遷移する場合には，図 10.7 の式(10.50)の線図ように，実験値とよく一致する。

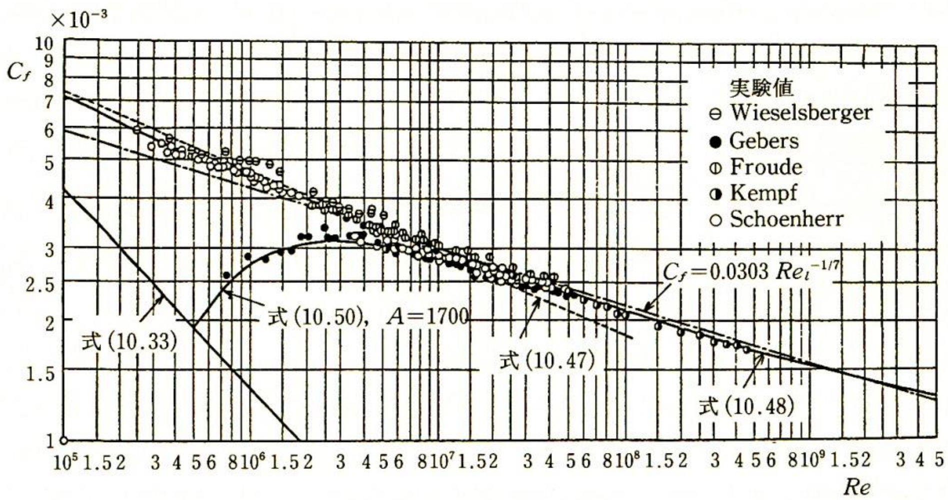

図 10.7　平板の摩擦抗力係数

［例題 10.4］ 温度 20°C，流速 U＝50m/s の空気中に置かれた長さ l＝0.5m，幅 B＝2m の薄い平板に作用する摩擦抗力係数 C_f と平板に作用する全摩擦抵抗 D_f を求めよ。ただし，流れは平板上で層流から乱流に遷移しているとするが，確認せよ。

［解］ 表 1.2 より，動粘度 $\nu = 1.512\times10^{-5}$ m²/s，密度 $\rho = 1.205$ kg/m³ であるから，レイノルズ数 Re_l は

$$Re_l = \frac{Ul}{\nu} = \frac{50\times0.5}{1.512\times10^{-5}} = 1.65\times10^{6}$$

したがって，$5\times10^5 < Re_l < 5\times10^6$ にあり，層流と乱流が存在しているので，摩擦抗力係数 C_f は，式(10.49)において，A がおおよそ 3300 として

$$C_f = \frac{0.074}{Re_l^{\,1/5}} - \frac{A}{Re_l} = \frac{0.074}{(1.65\times10^6)^{1/5}} - \frac{3300}{1.65\times10^6} = 0.00222$$

全摩擦抵抗 D_f は

$$D_f = C_f\frac{\rho U^2}{2}A = 0.00222\times\frac{1.205\times50^2}{2}\times2\times0.5\times2 = 6.69\text{N}$$