# 流体の力学　基礎編

## １０．境界層と物体まわりの流れ

10.4　平板に沿う層流境界層

＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊

### 10.4　平板に沿う層流境界層

平板の全長 $l$ を代表長さとしたレイノルズ数 $Re_l$（$=U\,l/\nu$）があまり大きくない $Re_l<5\times10^5$ のとき，平板全体は層流境界層に覆われていると考えてよい。運動量積分式を用いて層流境界層を近似的に調べる。

層流の場合の摩擦応力 $\tau_0$ は，式(1.7)と $u=Uf(\eta)$，$dy=\delta\, d\eta$ より

$$\tau_0=\mu\left(\frac{du}{dy}\right)_{y=0}=\mu\frac{U}{\delta}\left\{\frac{d(\eta)}{d\eta}\right\}_{\eta=0}=\frac{\mu U\beta}{\delta} \tag{10.12}$$

ただし，

$$\beta=\left\{\frac{df(\eta)}{d\eta}\right\}_{\eta=0} \tag{10.13}$$

である。式(10.11)と(10.12)は等しいので

$$\rho U^2\alpha\frac{d\delta}{dx}=\frac{\mu U\beta}{\delta}$$

$$\therefore\ \delta\, d\delta=\frac{\nu\beta}{U\alpha}dx \tag{10.14}$$

となる。上式を積分すると

$$\frac{\delta^2}{2}=\frac{\nu\beta}{U\alpha}x+C$$

となる。前縁 $x=0$ のとき $\delta=0$ であるから，積分定数 $C=0$ となるので，層流境界層の厚さ $\delta$ は

$$\delta=\sqrt{\frac{2\beta}{\alpha}\frac{\nu x}{U}} \tag{10.15}$$

で与えられる。上式を式(10.12)に代入して

$$\tau_0=\mu U\beta\sqrt{\frac{\alpha}{2\beta}\frac{U}{\nu x}}=\rho U^2\sqrt{\frac{\alpha\beta}{2}\frac{\nu}{Ux}} \tag{10.16}$$

となる。単位深さの平板の片面に作用する摩擦抵抗 $D_f$ は

$$D_f=\int_0^x \tau_0 dx=\int_0^x \rho U^2\sqrt{\frac{\alpha\beta}{2}\frac{\nu}{Ux}}dx=\rho U^2\sqrt{2\alpha\beta\frac{\nu x}{U}} \tag{10.17}$$

となる。長さ $l$ の平板に対する摩擦抵抗 $D_f$ は

$$D_f=\rho U^2\sqrt{2\alpha\beta\frac{\nu l}{U}} \tag{10.18}$$

一般に，摩擦抵抗は摩擦抗力係数 $C_f$ と面積 $A$ をもちいて

$$D_f=C_f\frac{\rho}{2}U^2A \tag{10.19}$$

で表される。流体に接している平板の単位幅当たりの摩擦抵抗は，$A=1\times l$ であるから

$$D_f=C_f\frac{\rho}{2}U^2l \tag{10.20}$$

となる。摩擦抗力係数は $C_f$ は，式(10.18)，(10.20)より

$$C_f=\frac{D_f}{\rho U^2 l/2}=2\sqrt{2\alpha\beta\frac{\nu}{Ul}}=2\sqrt{2\alpha\beta\frac{1}{Re_l}} \tag{10.21}$$

ただし，$Re_l$ は，平板の全長 $l$ を代表長さとした平板のレイノルズ数で

$$Re_l=\frac{Ul}{\nu} \tag{10.22}$$

である。

式(10.10)，(10.13)の $\alpha$，$\beta$ がわかると $\delta$，$\tau_0$，$D_f$，$C_f$ が求められる。いま，平板の層流境界層内の速度分布を円管内層流における放物線形で近似できるとすると

$$U=U_{max}\left\{1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right\} \tag{10.23}$$

ここに，$U_{max}$ は最大速度，$r$ は管中心よりの任意の距離，$R$ は管内径であり，$U_{max}=U$，$R=\delta$，$r=\delta-y$ と置き換えると

$$u=U\left\{1-\left(\frac{\delta-y}{\delta}\right)^2\right\} \tag{10.24}$$

上式と式(10.8)より

$$\frac{u}{U}=f\left(\frac{y}{\delta}\right)=f(\eta)=2\eta-\eta^2 \tag{10.25}$$

上式と式(10.10)，(10.13)より，$\alpha$，$\beta$を求めると

$$\alpha=\int_0^1\{f(\eta)-f(\eta)^2\}d\eta=\int_0^1\{(2\eta-\eta^2)-(2\eta-\eta^2)^2\}d\eta=\frac{2}{15}$$

$$\beta=\left\{\frac{df(\eta)}{d\eta}\right\}_{\eta=0}=\left\{\frac{d(2\eta-\eta^2)}{d\eta}\right\}_{\eta=0}=2$$

これらの値を(10.15),(10.16),(10.16),(10.21)に代入して

$$\delta=5.48\sqrt{\frac{\nu x}{U}}=5.48\sqrt{\frac{xl}{Re_l}} \tag{10.26}$$

$$\tau_0=0.365\rho U^2\sqrt{\frac{\nu}{Ux}}=0.730\frac{\rho U^2}{2}\sqrt{\frac{\nu}{Ux}} \tag{10.27}$$

$$D_f=0.730\rho U^2\sqrt{\frac{\nu l}{U}} \tag{10.28}$$

$$C_f=\frac{1.460}{\sqrt{Re_l}} \tag{10.29}$$

となる。

ブラジウス(Blasius)は,境界層方程式の厳密解によって$\alpha=0.135$, $\beta=1.63$を得て，次の式を算出している。

$$\delta=4.91\sqrt{\frac{\nu x}{U}}=4.91\sqrt{\frac{xl}{Re_l}} \tag{10.30}$$

$$\tau_0=0.332\rho U^2\sqrt{\frac{\nu}{Ux}} \tag{10.31}$$

$$D_f=0.664\rho U^2\sqrt{\frac{\nu l}{U}} \tag{10.32}$$

$$C_f = \frac{1.328}{\sqrt{Re_l}} \tag{10.33}$$

したがって，平板の片面，単位幅あたりの摩擦抵抗 $D_f$は，式(10.28)，(10.32)で求まる。

**［例題 10.1］** 図 10.7 に示すように, 流速 6m/s の空気中に長さ $l$=1m, 幅 $B$=0.5m の薄い平板を平行に置いた。(a)平板上には層流境界層，乱流境界層のいずれが生じているかを調べよ。また，(b)摩擦抗力係数 $C_f$，(c)平板の両面にはたらく全摩擦抵抗 $D_f$，(d)平板の後縁での境界層の厚さ $\delta$ を求めよ。ただし，動粘度 $\nu$ =$1.5\times10^{-5}$ m²/s とする。

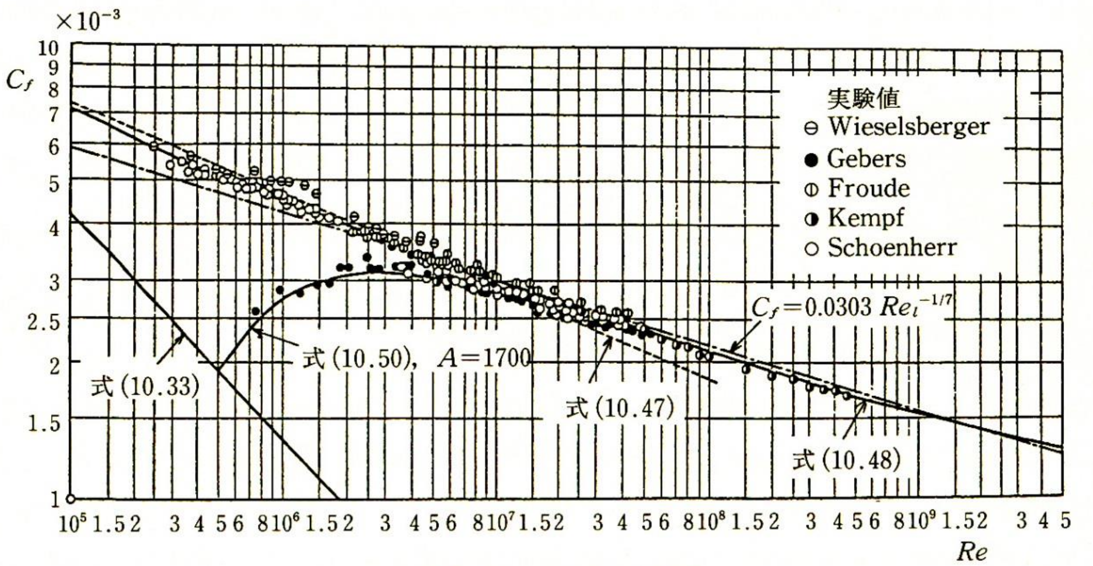


図 10.7　平板の摩擦抗力係数

**［解］** (a)平板のレイノルズ数 $Re_l$ は，式(10.22)より

$$Re_l = \frac{Ul}{\nu} = \frac{6\times1}{1.5\times10^{-5}} = 4\times10^5 < 5\times10^5$$

したがって，層流境界層が生じている。

(b)摩擦抗力係数 $C_f$は，ブラジウスの厳密解式(10.33)を使用すると

$$C_f = \frac{1.328}{\sqrt{Re_l}} = \frac{1.328}{\sqrt{4\times10^5}} = 0.002$$

(c)平板の両面にはたらく全摩擦抵抗 $D_f$は，式(10.19)より

$$D_f = C_f \frac{\rho U^2}{2} A = 0.002 \times \frac{1.2 \times 6^2}{2} \times 0.5 \times 1 \times 2 = 0.0432\ \mathrm{N}$$

(d)平板の後縁での境界層厚さ $\delta$ は，式(10.30)より

$$\delta = 4.91 \sqrt{\frac{\nu x}{U}} = 4.91 \sqrt{\frac{1.5 \times 10^{-5} \times 1}{6}} = 0.0078\ \mathrm{m} = 7.8\ \mathrm{mm}$$

**［例題 10.2］** 流速 6m/s で流れている水中に流れ方向の長さ $l$＝60mm，流れに直角な幅 $B$＝20mm の滑らかな薄い平板を水面と平行に固定したとき，平板の摩擦抗力係数 $C_f$，全摩擦抵抗 $D_f$，および平板の後縁での境界層の厚さ $\delta$ を求めよ。ただし，水の動粘度 $\nu = 1 \times 10^{-6}\,\mathrm{m^2/s}$，密度 $\rho = 1000\ \mathrm{kg/m^3}$ とする。

**［解］** 平板のレイノルズ数は

$$Re_l = \frac{Ul}{\nu} = \frac{6 \times 60 \times 10^{-3}}{1 \times 10^{-6}} = 3.6 \times 10^5 < 5 \times 10^5$$

したがって，層流境界層であるから摩擦抗力係数 $C_f$ は，式(10.33)より

$$C_f = \frac{1.328}{\sqrt{Re_l}} = \frac{1.328}{\sqrt{3.6 \times 10^5}} = 0.0022$$

平板の両面に作用する全摩擦抵抗 $D_f$ は，式(10.19)より

$$D_f = C_f \frac{\rho U^2}{2} A = 0.0022 \times \frac{1000 \times 6^2}{2} \times 0.02 \times 0.06 \times 2 = 0.095\ \mathrm{N}$$

境界層の厚さ $\delta$ は

$$\delta = 4.91 \sqrt{\frac{\nu x}{U}} = 4.91 \sqrt{\frac{1 \times 10^{-6} \times 0.06}{6}} = 0.0005\ \mathrm{m} = 0.5\ \mathrm{mm}$$