

## ideal fluid6

- § 17 静止円 円柱を過ぎる循環を伴う流れ ----- (p90-93)  
 円を過ぎる複素ポテンシャル 循環 stagnation point 揚力 抗力  
 循環を伴う流れの3パターン ダランベールの逆説 ジューコフスキーの定理  
 Kutta-Joukowski's theorem マグヌス効果 (Magnus effect)
- § 18 翼形 Joukowski 翼形 ----- (p94-97)  
 写像関数 Joukowski 変換 Joukowski 翼形 Joukowski 翼形の作図法
- § 19 ブラジウスの定理 Blasius の定理 ----- (p98-99)
- § 20 循環を伴う円柱および Joukowski 翼にはたらく揚力・抗力 -----(p100-106)  
 循環を伴う円柱の揚力, 抗力  
 ジューコフスキー翼の揚力 Blasius の定理 Cauchy の留数の定理

## § 17 静止円 or 円柱を過ぎる循環を伴う流れ

半径  $a$  の円のまわりに強さ  $k$  の循環があると同時に、一様流  $U$  が存在するときを考える。

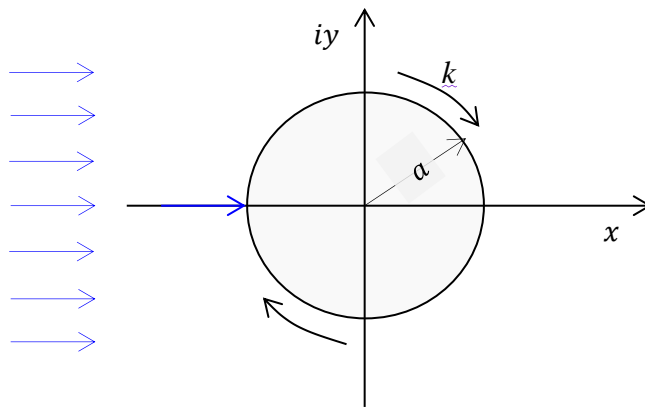
一様流と円との複素ポテンシャル  $w_1$  (or 円を過ぎる流れの複素ポテンシャル  $w_1$ ) は、§ 10 の (10.6) 式より

$$w_1 = -U \left( z + \frac{a^2}{z} \right) \quad (\text{イ})$$

次に、循環は時計回りで強さを  $k$  とすると、これによる複素ポテンシャル  $w_2$  は、§ 13 の (13.3) 式より

$$w_2 = -ik \ln \frac{z}{a} \quad (\text{ロ})$$

したがって、全体の複素ポテンシャル  $w$  は



$$w = w_1 + w_2$$

$$\therefore w = - \left[ U \left( z + \frac{a^2}{z} \right) + ik \ln \frac{z}{a} \right] \quad (17.1)$$

円周上では、 $r=a$  だから、 $z = ae^{i\theta}$  ( $z = re^{i\theta}$ )

$$\begin{aligned} \therefore w &= - \left[ U \left( ae^{i\theta} + \frac{a^2}{ae^{i\theta}} \right) + ik \ln \frac{ae^{i\theta}}{a} \right] \\ &= - \left[ U (ae^{i\theta} + ae^{-i\theta}) + ik \ln e^{i\theta} \right] \quad (i^2 = -1, \text{三角関数で整理}) \\ \therefore w &= -[2aU \cos \theta - k\theta] \quad (17.1') \end{aligned}$$

すなわち、実数のみとなる。

$$(w = \phi + i\psi)$$

したがって、速度ポテンシャル  $\phi$  と流れ関数  $\psi$  は、それぞれ

$$\phi = -[2aU \cos \theta - k\theta]$$

$$\psi = 0$$

すなわち、円周上では、一本の流線となる。

<次に, Stagnation point を求める>

Stagnation point においては,  $dw/dz = 0$ を求めるとよいから

$$\frac{dw}{dz} = -\left[U\left(1 - \frac{a^2}{z^2}\right) + \frac{ik}{z}\right] = 0$$

$$\therefore U(z^2 - a^2) + ikz = 0$$

$$\left(\frac{z}{a}\right)^2 + \frac{ik}{aU}\left(\frac{z}{a}\right) - 1 = 0$$

$$\therefore \frac{z}{a} = -\frac{ik}{2aU} \pm \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{ik}{aU}\right)^2 + 1}$$

$$\therefore \frac{z}{a} = -\frac{ik}{2aU} \pm \sqrt{1 - \frac{k^2}{4a^2U^2}}$$

$$\therefore z = a \left\{ -\frac{ik}{2aU} \pm \sqrt{1 - \frac{k^2}{4a^2U^2}} \right\} \quad (17.2)$$

で与えられる。

二次方程式の根の公式

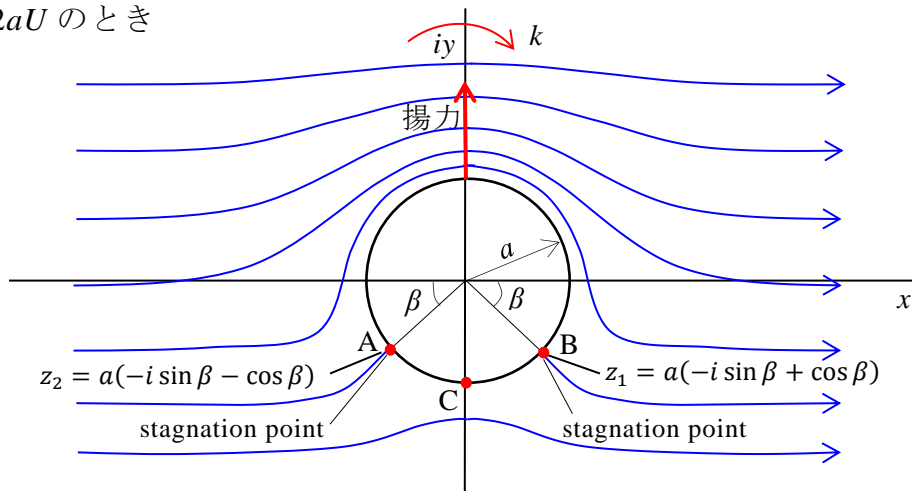
$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}} \quad \text{だから}$$

上式 ;  $a = 1, b = \frac{ik}{aU}, c = -1$  に対応しているから

<循環を伴う流れ 3パターン>

i)  $k < 2aU$  のとき



$$\frac{k}{2aU} = \sin \beta \quad (i)$$

とおくと, (17.2) 式で示される stagnation point は

$$\begin{aligned} z &= a(-i \sin \beta \pm \sqrt{1 - \sin^2 \beta}) && (\sin^2 \beta + \cos^2 \beta = 1) \\ &= a(-i \sin \beta \pm \cos \beta) && (17.3) \end{aligned}$$

となる。

したがって, 上図の点 A, B が stagnation points になる。

Bernoulli の定理より, 円の上側の圧力は, 下側の圧力より小さい。

故, 揚力は上向きに作用する。

ii)  $k = 2aU$  のとき

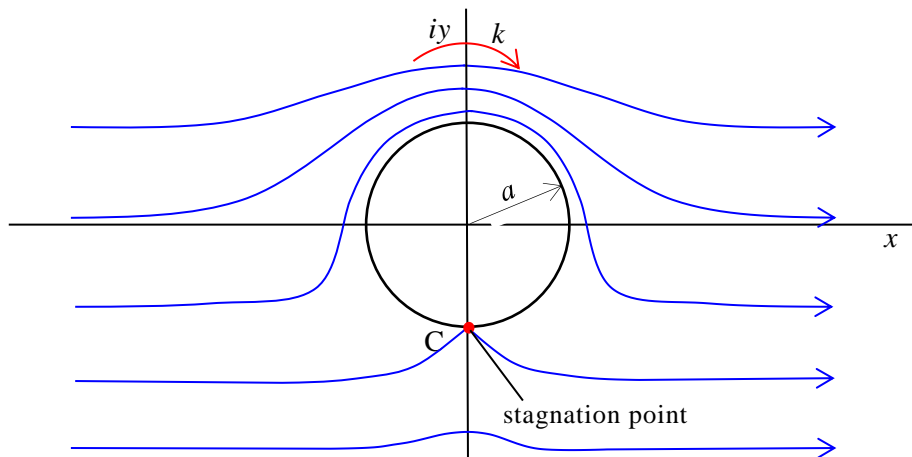
(i) より

$$\sin \beta = 1 \quad (ii)$$

$$\therefore \sin \beta = \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore z_1 = z_2 = z = a(-i \sin \beta) = -ai \quad (17.4)$$

故, 等根となり, stagnation point は, C の一点だけとなる。



iii)  $k > 2aU$  のとき (circulation の大きいとき)

$$\frac{k}{2aU} = \cosh \beta \tag{iii}$$

とおくと

stagnation point は, (17.2) 式より

$$\begin{aligned} z &= a \left\{ -i \cosh \beta \pm \sqrt{1 - \cosh^2 \beta} \right\} \\ &= a \left\{ -i \cosh \beta \pm \sqrt{-\sinh^2 \beta} \right\} \\ &= a \left\{ -i \cosh \beta \pm i \sinh \beta \right\} \\ &= ia(\cosh \beta \pm \sinh \beta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore z_1 &= -iae^\beta & \therefore z_1 &> a \quad (\because \beta > 0) \\ \therefore z_2 &= -iae^{-\beta} & \therefore z_2 &< a \quad (\because \beta > 0) \end{aligned} \tag{17.5}$$

$z_1$  は, 円 (円柱) の外にあって, 実在の stagnation point となる。

$z_2$  は, 円 (円柱) の中にあり, 実在しない。

i), ii) の場合に比べて小である。

『一般に, 流れが物体に及ぼす力の流れの方向の成分を抵抗 (抗力) drag, 流れに直角な方向の成分を揚力 lift という。』

二次元の円 (円柱) の場合, 抗力は0, 揚力は $2\pi\rho Uk$ となる。(20.2)式, 後述する。)

前者を, **ダランベールのパラドックス** (d'Alembert's paradox)

or **ダランベールの背理 (ダランベールの逆説)** という。

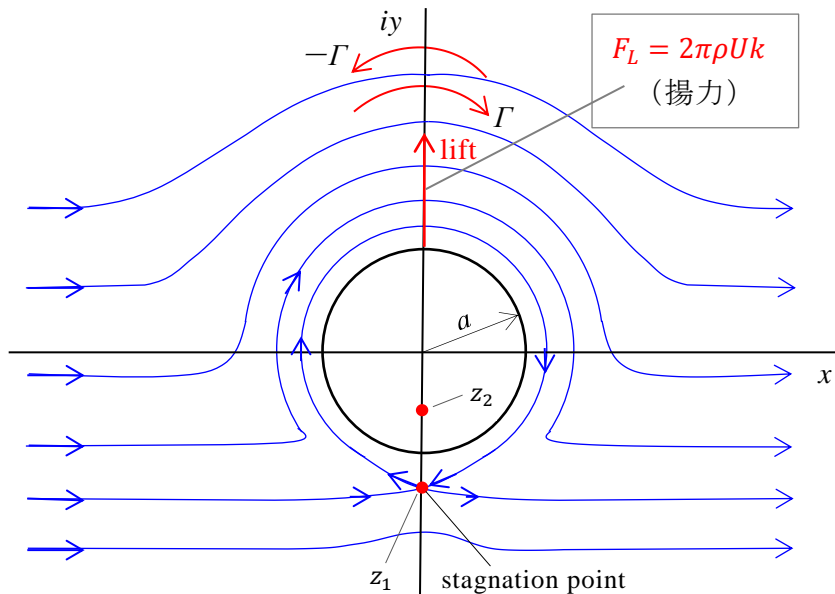
つまり, 完全流体 (理想流体) 中に置かれた円柱には, 抵抗は生じない。

後者を, **クッタ・ジュコウフスキーの定理** (Kutta-Joukowski's theorem) という。

言い換えると, 回転しながら運動する物体には, 流れに垂直な方向に力がはたらく。

これを, **マグヌス効果** (Magnus effect) という。野球のピッチャーの投げるボール, サッカーのコーナーキック or シュートなどのボールに回転を与えると変化して曲がるのは, このマグヌス効果のためである。

$$\begin{aligned} \sinh \beta &= \frac{e^\beta - e^{-\beta}}{2} \\ \cosh \beta &= \frac{e^\beta + e^{-\beta}}{2} \\ \sinh^2 \beta - \cosh^2 \beta &= -1 \\ i^2 = -1, \sqrt{-1} &= \sqrt{i^2} = i \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} F_L &= 2\pi\rho Uk \\ &= \rho U \cdot 2\pi k \\ &= \rho U \cdot 2\pi C \\ &= \rho U \cdot \Gamma \\ \Gamma &= 2\pi C \\ C &= \frac{\Gamma}{2\pi} \\ (C=k) \end{aligned}$$

## § 18 翼形 Joukowski 翼形

### ジュークフスキー翼形

#### <一般の翼形>

- ・ 前 縁 leading edge ; A
- ・ 後 縁 trailing edge ; B
- ・ 翼弦長 chord length ; AB
- ・ 翼 幅 span ; CD
- ・ 縦横比 aspect ratio ; CD/AB

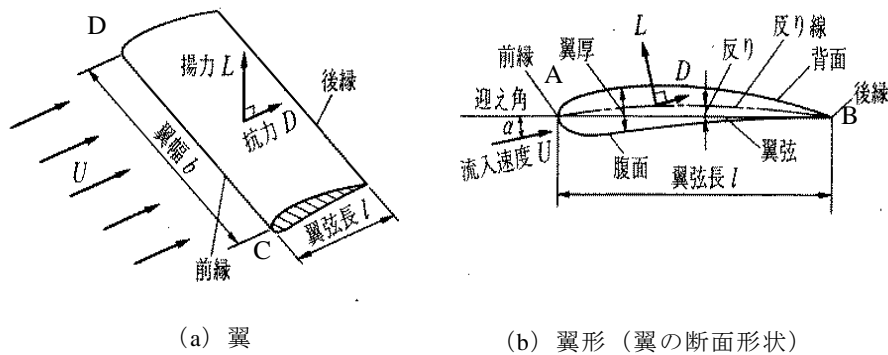


図 翼の各部の名称

#### <翼形理論における仮定>

- (1) 流体は、非圧縮性 incompressible  
非粘性 inviscid  
とする。
- (2) 二次元流れで、aspect ratio は十分大きいとする。
- (3) vorticity はゼロで、単に、circulation のみを伴うものとする。

『このような仮定をおくことは、理論が実際とやや異なった可能性を生じ、好ましいことではない。しかしながら、翼形理論を数学的に発展させるためには、現在のところやむを得ない必要条件である。』

『この仮定のもとで理論を進めることが、現実に従来の航空機等の発展に、大きな役割を果たしてきたのである。』

## < Joukowski 翼形 >

現在使用されている翼形のうちもっとも多く使用されているのが、**Joukowski 翼形**である。

この翼形は、抗力、揚力が比較的容易に理論的に計算できる点において有利である。

以下、Joukowski 翼形について、述べる。

前節で、循環を伴う円を過ぎる流れについて述べたが

写像関数；

$$\zeta = z + \frac{C^2}{z} \quad (18.1)$$

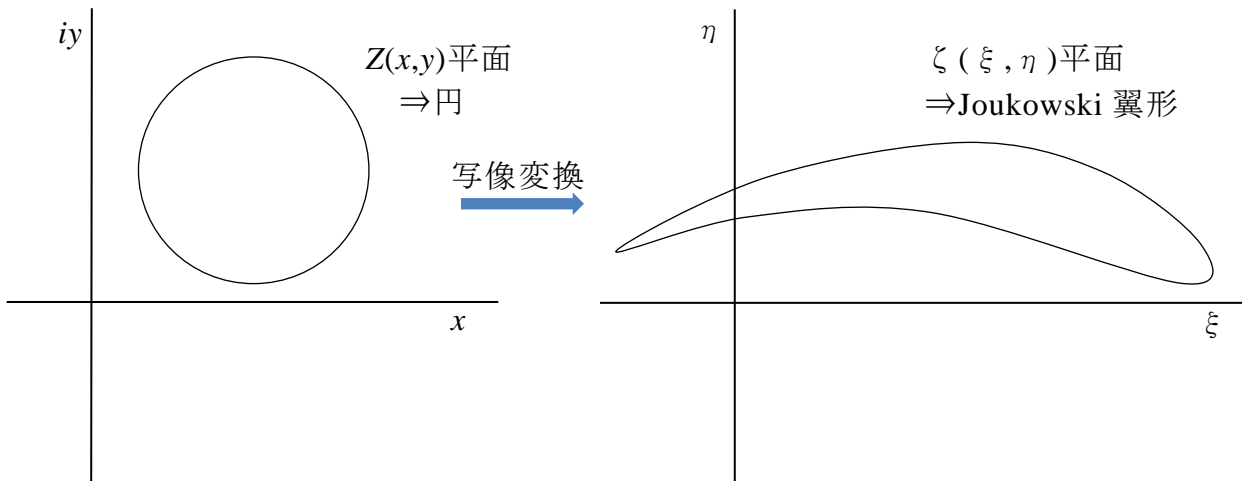
の関係より、 $z$  平面  $(x, y)$  より、 $\zeta$  平面  $(\xi, \eta)$  へ写像することを、Joukowski が初めて提唱した。

この写像において、 $z \rightarrow \infty$  のとき、 $\zeta \rightarrow \infty$  となり、(18.1) 式より  $\zeta = z$  であり、このことは無限遠においては、両者の流れの相違はない。

この (18.1) 式によって、 $z$  平面から  $\zeta$  平面へ変換することを、**Joukowski 変換** (Joukowski transformation) と呼ぶ。

この (18.1) 式よって、円より写像される翼形を **Joukowski 翼形** (ジューコフスキ一翼形) と呼ぶ。

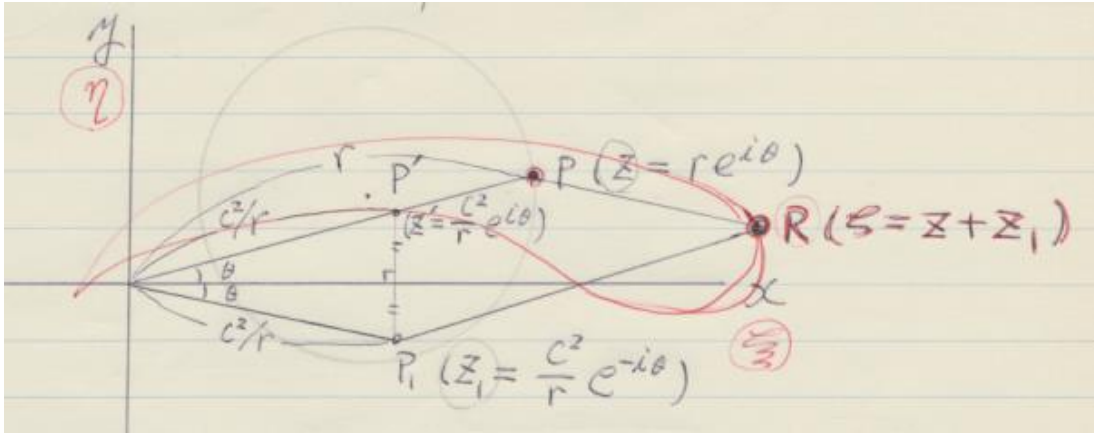
「実用の翼形は、写像関数  $\zeta$  をさらに補正したものをを用いている。」



次に、その作図法を示す。

## < Joukowski 翼形の作図法 >

### 簡単作図法



(18.1)式,  $\zeta = z + \frac{C^2}{z}$  において

$$\frac{C^2}{z} = z_1 \text{ とおくと} \quad (18.2)$$

(18.1) 式は

$$\zeta = z + z_1 \quad (18.3)$$

となる。

いま,  $z_1$  を求める。今, 任意の点を  $P$  とすると, (18.2) 式より

$$z_1 = \frac{C^2}{z} = \frac{C^2}{re^{i\theta}} = \frac{C^2}{r} e^{-i\theta}$$

となる。

- $\frac{C^2}{r}$  ; を計算する。

図において,  $P$  が円周上の任意の点  $z$  であるとき,  $P_1$  が  $z_1$  である。

$z = re^{i\theta}$  と  $z_1 = \frac{C^2}{z} = \frac{C^2}{re^{i\theta}} = \frac{C^2}{r} e^{-i\theta}$  をベクトル合成(平行四辺形を作る)した点

$R(\zeta = z + z_1)$  が,  $\zeta$  平面 ( $\xi, \eta$ ) 上における  $P$  の対応点である。

$P$  が  $z$  平面の円周上を一周するとき,  $R$  は  $\zeta$  平面上に一つの閉曲線を描く。これが, 一般に **Joukowski 翼形 (ジュークフスキー翼形)** と呼ばれるものである。

$z$  平面上における円の位置, および (18.1) 式の Joukowski 変換における定数  $C$  の選び方により, 異なった種々の形の Joukowski 翼形が得られる。

この Joukowski 翼形は, 後述する揚力・抗力が理論的に求められる点が有利である。



(例題) Joukowski 翼形を作図せよ。

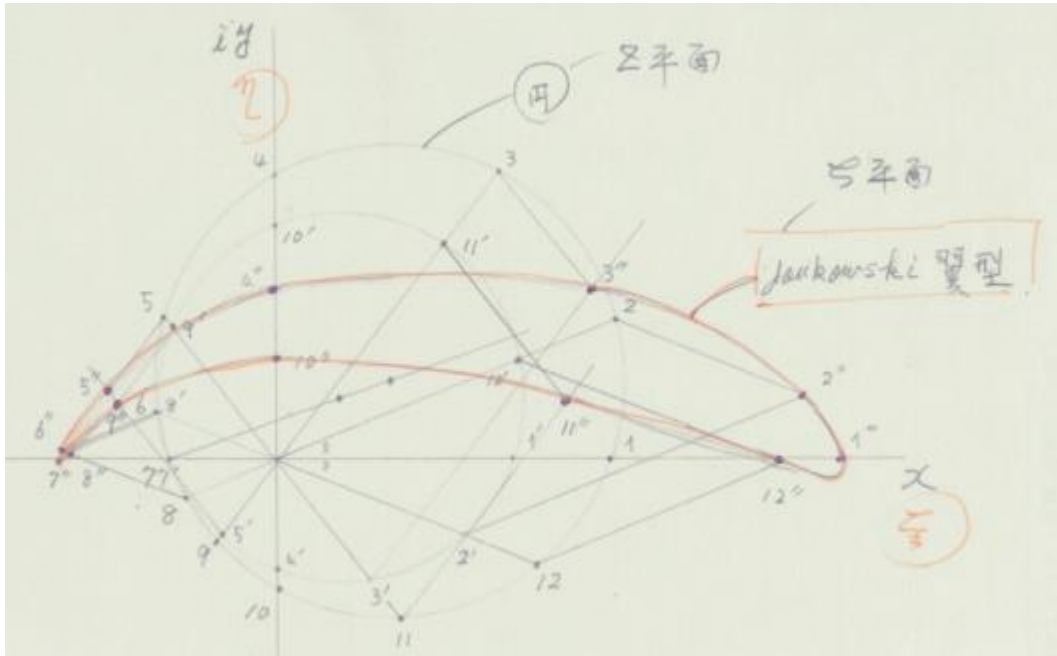
ただし, 円の直径 ; 100 mm

C は ; 任意

中心の位置は ; 任意とする。

ヒント ; z 平面 (x, y) より  $\zeta$  ( $\xi, \eta$ ) へ写像せよ。

(解)



### < Joukowski 翼形の別の計算方法 >

数式で示すと

$$\begin{aligned}
 \zeta &= z + \frac{C^2}{z} = x + iy + \frac{C^2}{x + iy} \\
 &= x + iy + \frac{C^2(x - iy)}{(x + iy)(x - iy)} \\
 &= x + iy + \frac{C^2(x - iy)}{x^2 + y^2} \\
 &= x \left( 1 + \frac{C^2}{x^2 + y^2} \right) + iy \left( 1 - \frac{C^2}{x^2 + y^2} \right)
 \end{aligned} \tag{18.4}$$

であるから,  $\zeta = \xi + i\eta$  ( $\zeta$  平面上で) より

$$\begin{aligned}
 \xi &= x \left( 1 + \frac{C^2}{x^2 + y^2} \right) \\
 \eta &= y \left( 1 - \frac{C^2}{x^2 + y^2} \right)
 \end{aligned} \tag{18.5}$$

となり, z 平面上の点 (x, y) は, (18.5) 式で計算される点 ( $\xi, \eta$ ) の  $\zeta$  平面上に写像される。この翼形を **ジュークフスキー翼形** と呼ぶ。

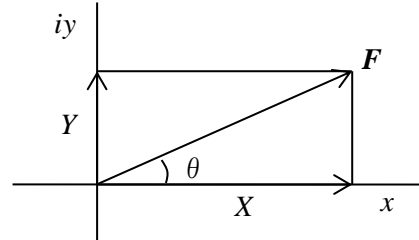
## § 19 ブラジウスの定理

### Blasius の定理

一般に、複素平面上の力  $F$  があり、これの components がおのおの  $X, Y$  であるならば

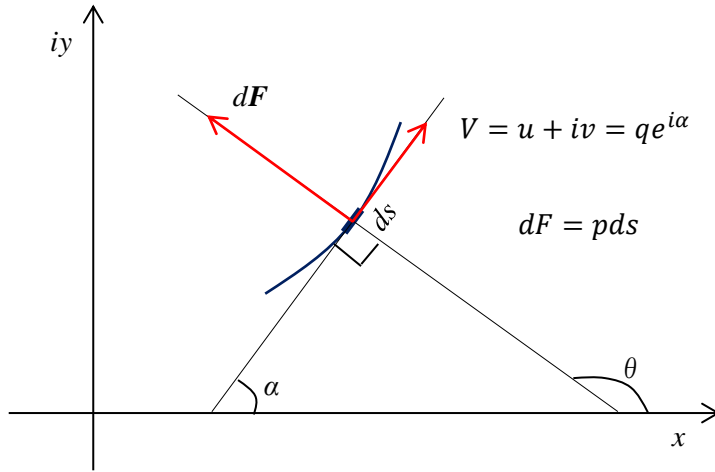
$$\begin{aligned} & \mathbf{F} = X + iY \\ \text{or} & \\ & \mathbf{F} = |\mathbf{F}|e^{i\theta} \end{aligned}$$

(19.1)



である。

<流体中にある cylindrical な物体にはたらく圧力を考えてみよう。>



表面曲線の微小部分を  $ds$  (奥行き ; 1) とし、この部分にはたらく圧力を  $dF$ 、圧力の強さを  $p$ 、 $ds$  が  $x$  軸となす角を  $\alpha$  とすると

$$\begin{aligned} dF &= |dF|e^{i\theta} = |dF|e^{i(\alpha+\frac{\pi}{2})} = pdse^{i(\alpha+\frac{\pi}{2})} \\ &= ipdse^{i\alpha} = ip \cdot dz \end{aligned} \tag{19.2}$$

今、 $F$  と共役な力を  $\bar{F}$  で表すと ((19.2)式より)

$$d\bar{F} = -ipdse^{-i\alpha} = -i \cdot pdze^{-2i\alpha} \tag{19.3}$$

これを閉曲線に沿って積分すると

$$\bar{F} = X - iY = -i \int_C pe^{-2i\alpha} dz \tag{19.4}$$

で与えられる。

$$\begin{aligned} e^{i\frac{\pi}{2}} &= \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i \\ dz &= dse^{i\alpha} \end{aligned}$$

今、流れ場における圧力  $p$  は、Bernouilli の定理より、

$$p = p_0 - \frac{1}{2}\rho q^2 \quad (19.5)$$

である。

ここに、 $p_0$ は、流速  $0$  の位置での圧力(全圧)、 $q$ は流速である。

また、物体表面での速度  $V$  は、tangential である。したがって、speed  $|V| = q$  であるから

$$V = u + iv = qe^{i\alpha}$$

である。

complex potential  $w$  を使用すると

$$-\frac{dw}{dz} = u - iv = qe^{-i\alpha}$$

$$\therefore q = -e^{i\alpha} \frac{dw}{dz}$$

(19.5) 式に代入すると

$$p = p_0 - \frac{1}{2}\rho q^2 = p_0 - \frac{1}{2}\rho e^{2i\alpha} \left(\frac{dw}{dz}\right)^2$$

となる。

これを、(19.4) 式の積分  $\int$  の中の  $p$  に入れれば良い。なお、 $p_0 e^{-2i\alpha}$  の閉曲線に沿うての積分は、 $0$  となるから

$$\bar{F} = i \int_C \frac{1}{2}\rho \left(\frac{dw}{dz}\right)^2 dz = \frac{1}{2}i\rho \int_C \left(\frac{dw}{dz}\right)^2 dz \quad (19.6)$$

となる。

この (19.6) 式の右辺が cylindrical な物体 (長さ  $1$ ) にはたらく力を与える式であり、**Blasius の定理 (ブラジウスの定理)** と呼ばれるものである。

これは、 $w$  が  $z$  の関数として既知のとき、固体にはたらく力 (抵抗力) を与えるものである。

さらに、原点に対するモーメント(moment)  $L$  は、同様にして

$$L = \text{rearl part of } \left\{ -\frac{1}{2}\rho \int_C z \left(\frac{dw}{dz}\right)^2 dz \right\} \quad (19.7)$$

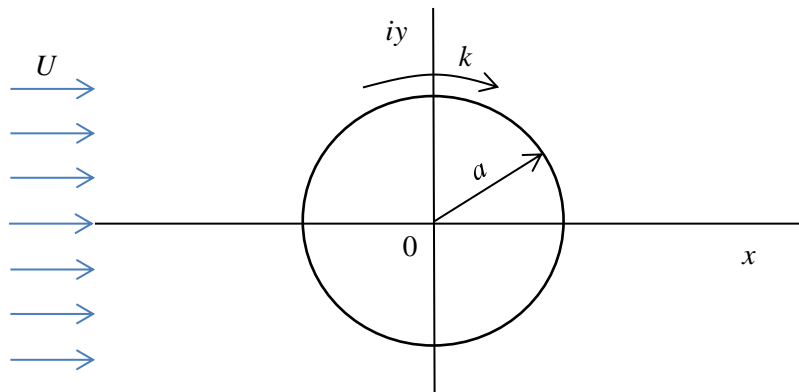
で与えられる。(証明 略)

## § 20 循環を伴う円柱 および

### Joukowski 翼にはたらく揚力・抗力

循環を伴う円柱, または Joukowski 翼のように, complex potential  $w$  が既知の場合は, Blasius の定理によって, その揚力, 抗力が容易に求められる。

#### (i) 循環を伴う円柱の揚力・抗力



一様な流れの中に循環  $k$  を伴う円柱がある § 17 の場合である。その complex potential は, (17.1) 式に示すように

$$w = - \left[ U \left( z + \frac{a^2}{z} \right) + ik \log_e \frac{z}{a} \right]$$

これを  $z$  について微分し,  $dw/dz$  を求め, Blasius の定理 (19.6) 式に入れると

$$\begin{aligned} \bar{F} &= X - iY \\ &= -\frac{1}{2}i\rho \int_C \left( U + \frac{ik}{z} - \frac{Ua^2}{z^2} \right)^2 dz \end{aligned} \quad (20.1)$$

この積分は, 円周に沿うて行われる。

したがって, Cauchy の留数の定理により,  $z^{-1}$  の項を除き, 他の項の積分  $\int$  は, すべて 0 となる。

$$\begin{aligned} X - iY &= \frac{1}{2}i\rho \times 2\pi i \times 2iUk \\ &= -i \cdot 2\pi\rho Uk \end{aligned}$$

よって

$$X = 0, \quad Y = 2\pi\rho Uk \quad (20.2)$$

である。すなわち, 鉛直上方の力 (揚力) のみを受ける。

$$\left( U + \frac{ik}{z} - \frac{Ua^2}{z^2} \right)^2 = U^2 + \frac{2iUk}{z} - \left( \frac{k^2}{z^2} + \frac{2U^2a^2}{z^2} \right) - \frac{2iUka^3}{z^3} + \frac{U^2a^4}{z^4}$$

Cauchy の留数の定理 ;

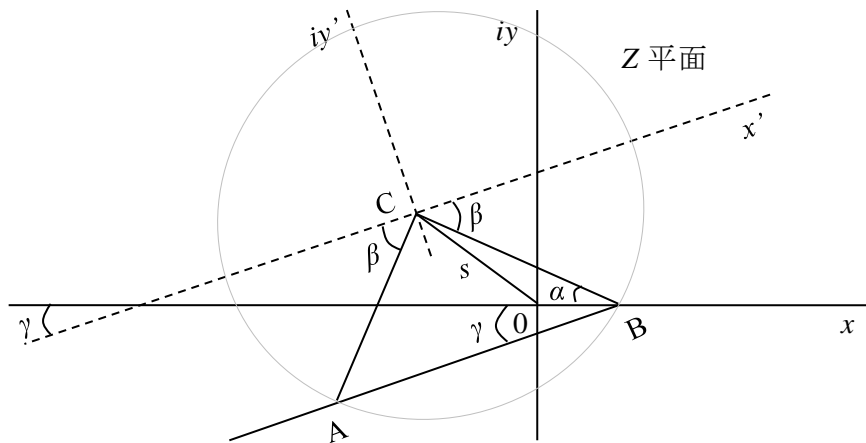
$$\oint \frac{A_1}{z} dz = 2\pi i X A_1$$

$$\oint \frac{A_2}{z^2} dz = 0$$

$$\oint \frac{A_3}{z^3} dz = 0$$

.....

(ii) 円柱の座標移動を行ったもの (その1)



§ 17 の座標原点を移動し、かつ角  $\gamma$  だけ回転させる。stagnation point が  $x$  軸上にあるようにする。なお、円の中心  $C$  の位置を  $z=s$  とする。この  $\gamma$  を流入角と呼ぶ。

このときは、§ 17 のときの座標を  $z'$  とすると、 $z$  と  $z'$  の関係は

$$z = z'e^{+i\gamma} + s$$

$$z' = (z - s)e^{-i\gamma}$$

であるから、(17.1)式より

$$w = - \left[ U \left( z' + \frac{a^2}{z'} \right) + ik \ln \frac{z'}{a} \right]$$

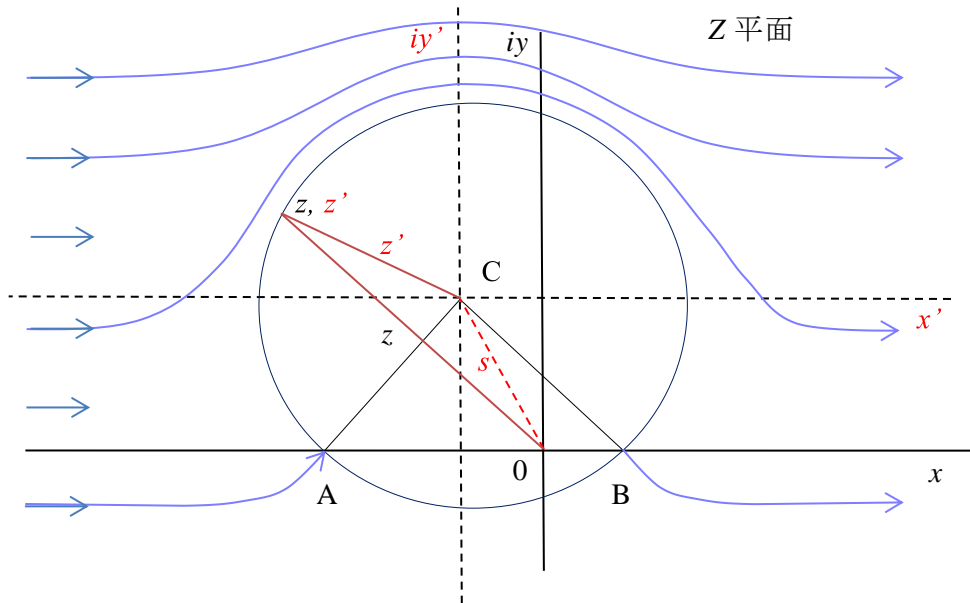
$$w = - \left[ U(z - s)e^{-i\gamma} + \frac{a^2 U e^{+i\gamma}}{(z - s)} + ik \{ \log_e(z - s) - i\gamma - \log_e a \} \right]$$

or 定数項を  $C$  とすると、(微分した場合 0 となることを考慮して)

$$w = - \left[ U z e^{-i\gamma} + \frac{a^2 U e^{+i\gamma}}{(z - s)} + ik \{ \log_e(z - s) + C \} \right] \tag{20.3}$$

となる。

## (iii) 円柱の座標移動を行ったもの (その2)



(i) の循環を伴う円柱まわりの流れにおいて、円の中心を  $s$  だけ移動させる。  
stagnation point A, B が  $x$  軸上にあるようにする。

§9 の (9.5) 式を参照, or 座標を  $z'$  とすると

$$z = z' + s$$

$$\therefore z' = z - s$$

これを §17 の (17.1) 式に代入すると

$$\begin{aligned} w &= - \left[ U \left( z' + \frac{a^2}{z'} \right) + ik \ln \left( \frac{z'}{a} \right) \right] \\ &= - \left[ U(z - s) + \frac{a^2 U}{z - s} + ik \{ \ln(z - s) - \ln a \} \right] \end{aligned}$$

定数項を  $C$  とすると

$$w = - \left[ Uz + \frac{a^2 U}{z - s} + ik \ln(z - s) + C \right] \quad (20.3')$$

となる。

第一項 ; 一様流

第二項 ; 円柱による影響

第三項 ; circulation によるものを表している。

第一項中に  $s$  は含まない ; 中心の位置に無関係である。

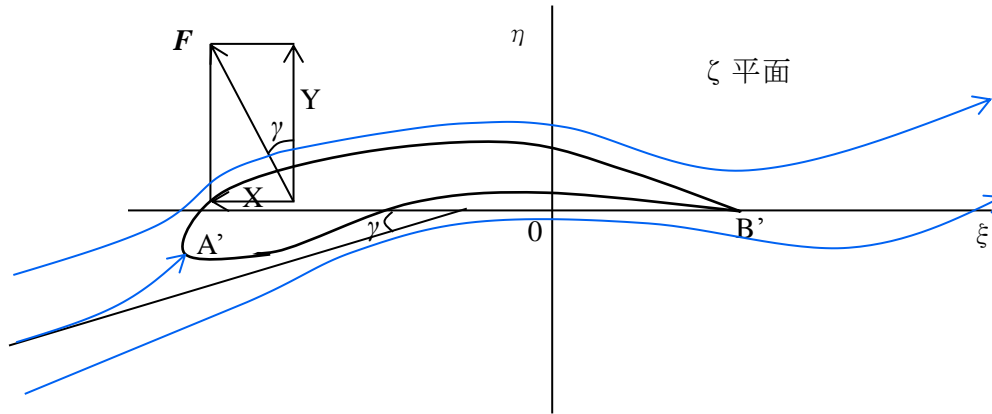
第三項中に  $\gamma$  は含まない ; circulation に流入角は無関係である。

ことを示す。

## (iv) ジューコフスキー翼の揚力 (Joukowski 翼の揚力)

これを (18.1) 式により,  $z$  平面  $(x, y)$  より  $\zeta$  平面  $(\xi, \eta)$  へ Joukowski 変換すると

$$\zeta = z + \frac{c^2}{z} \quad (18.1)$$



後縁  $B'$  の stagnation point は  $\xi$  軸上にあり, 一様流の流入角はやはり  $\gamma$  である。 ( $z = \infty, \zeta = z$ )

この場合の翼にはたらく力は, Blasius の定理により

$$F = X - iY = \frac{1}{2} i \rho \int_c \left( \frac{dw}{d\zeta} \right)^2 d\zeta \quad (20.4)$$

となる。

この積分は翼の表面に沿って行かうか, または十分に大きい閉曲線に沿って行ってもよい。

したがって

$$\frac{dw}{d\zeta} = \frac{dw}{dz} \cdot \frac{dz}{d\zeta} = \frac{dw}{dz} \cdot \frac{1}{1 - \frac{c^2}{z^2}}$$

$$d\zeta = \left( 1 - \frac{c^2}{z^2} \right)^{-1} dz = \frac{dz}{1 - \frac{c^2}{z^2}}$$

ゆえに

$$X - iY = \frac{1}{2} i \rho \int_c \left( \frac{dw}{dz} \right)^2 \frac{dz}{1 - \frac{c^2}{z^2}} \quad (20.5)$$

(20.3') の  $w$  より

$$\frac{dw}{dz} = - \left[ U - \frac{a^2 U}{(z-s)^2} + \frac{ik}{z-s} \right]$$

である。

級数に展開すると

$$(z-s)^{-1} = \frac{1}{z} + \frac{s}{z^2} + \dots$$

$$(z-s)^{-2} = \frac{1}{z^2} + \frac{2s}{z^3} + \dots$$

よって

$$\frac{dw}{dz} = - \left[ U + \frac{ik}{z} + \frac{iks - a^2U}{z^2} + \dots \right]$$

$$\left( \frac{dw}{dz} \right)^2 = a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots$$

とおくと

$$a_0 = U^2$$

$$a_1 = 2iUk$$

$$a_2 = 2iUks - 2a^2U^2 - k^2$$

⋮

} (20.6)

となる。

また、(20.3) 式より

$$\frac{dw}{dz} = - \left[ Ue^{-i\gamma} + \frac{a^2Ue^{+i\gamma}}{(z-s)^2} + \frac{ik}{z-s} \right]$$

である。級数に展開すると

$$(z-s)^{-1} = \frac{1}{z} + \frac{s}{z^2} + \dots$$

$$(z-s)^{-2} = \frac{1}{z^2} + \frac{2s}{z^3} + \dots$$

よって

$$\frac{dw}{dz} = - \left[ Ue^{-i\gamma} + \frac{ik}{z} + \frac{iks - a^2Ue^{+i\gamma}}{z^2} + \dots \right]$$

$$\left( \frac{dw}{dz} \right)^2 = a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots$$

とおくと

$$a_0 = U^2e^{-2i\gamma}$$

$$a_1 = 2iUke^{-i\gamma}$$

$$a_2 = 2iUkse^{-i\gamma} - 2a^2U^2 - k^2$$

⋮

} (20.6')

となる。また

$$\frac{1}{1 - \frac{c^2}{z^2}} = 1 + \frac{c^2}{z^2} + \dots \quad (20.7)$$



(20.6), (20.7) 式を (20.5) 式に入れ, Cauchy の留数の定理によって,  $z^{-1}$  の項のみゼロにならないことに注目して計算を行うと

$$e^{-i\gamma} = i \cos \gamma + \sin \gamma$$

$$\begin{aligned} X - iY &= \frac{1}{2} i\rho \times 2\pi i \times a_1 = -\pi\rho \cdot 2iUke^{-i\gamma} \\ &= -2\pi\rho kUie^{-i\gamma} = -2\pi\rho kU(i \cos \gamma + \sin \gamma) \end{aligned}$$

$$\therefore X = -2\pi\rho kU \sin \gamma, \quad Y = 2\pi\rho kU \cos \gamma \quad (20.8)$$

となる。

また

$$\frac{1}{1 - \frac{c^2}{z^2}} = 1 + \frac{c^2}{z^2} + \dots \quad (20.7')$$

(20.6'), (20.7') 式を (20.5') 式に入れ, Cauchy の留数の定理により,  $z^{-1}$  の項のみがゼロにならないことに注目して, 計算を行うと

$$\begin{aligned} X - iY &= \frac{1}{2} i\rho \times 2\pi i \times a_1 \\ &= -\pi\rho \times 2iUk \\ &= -i2\pi\rho kU \end{aligned}$$

$$\therefore X = 0, \quad Y = 2\pi\rho kU \quad (20.8')$$

である。

すなわち, 『この力は, 一様流の方向に垂直であり, 揚力のみが存在する。』

原点 0 に対する moment  $L$  は

$$L = \text{real part of } [-\pi i\rho(2c^2U^2 + 2iUks - 2a^2U^2 - k^2)]$$

この力は, 一様流の方向に垂直であり, その大きさは

$$F^2 = X^2 + Y^2$$

$$F = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

$$\therefore F = 2\pi\rho kU \quad (20.9)$$

または, (13.3) 式の  $k/2aU = \sin \beta$  の関係を用いると

$$k = 2aU \sin \beta$$

となる。したがって

$$F = 4\pi\rho aU^2 \sin \beta \quad (20.10)$$

である。

原点 0 に対する moment  $L$  も, 前と同様に計算できる。

$$L = \text{real part of } [-\pi i\rho(2c^2U^2 e^{-2i\gamma} + 2iUkse^{-i\gamma} - 2a^2U^2 - k^2)] \quad (20.11)$$

コーシーの積分定理；

コーシーの積分定理は、コーシーの第 1 定理ともいわれる、オーギュスタン＝ルイ・コーシーによって示された、数学、特に微分積分学において、複素平面上のある領域において正則な関数の複素積分についての定理である。

留数定理とは；

数学、殊に複素解析学における留数は、孤立特異点を囲む経路に沿う有理型関数の複素線積分により得られる複素数である。