

ideal fluid5

- § 13 循環 **Circulation** ----- (p81-84)
循環 Circulation 一様な循環の強さの場合 自由渦 free vortex
- § 14 渦糸 **Vortex filament** ----- (p85-87)
渦糸 vortex filament 渦 渦糸の強さ
- § 15 湧き出しと渦 ----- (p87-87)
- § 16 平面壁と渦 ----- (p88-89)
渦の移動 vortex pair

§ 13 循環 Circulation

次の complex potential を考える。

$$w = iC \ln z \quad (13.1)$$

C ; real な定数

この (13.1) 式の w を示す流れを、**循環** circulation とよぶ。

(13.1) 式で表される流れが、どのような流れかを知るために、流れ関数 ψ を求める。

(13.1) を実数部と虚数部に分けると

$$\begin{aligned} z &= r e^{i\theta} \\ \ln z &= \ln r + \ln e^{i\theta} \\ &= \ln r + i\theta \ln e \\ &= \ln r + i\theta \end{aligned}$$

故

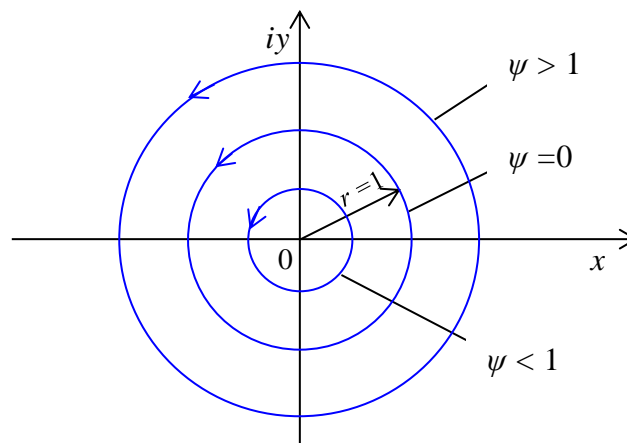
$$\begin{aligned} w &= iC \ln z \\ &= iC(\ln r + i\theta) \\ &= iC \ln r - C\theta \end{aligned}$$

速度ポテンシャルと流れ関数は、それぞれ

$$\text{速度ポテンシャル ; } \phi = -C\theta, \text{ 流れ関数 ; } \psi = C \ln r \quad (13.2)$$

したがって、流線は、原点を中心とする円群になる。 $r = \text{const}$ (同心円) が流線であり、 $r = 1$ の円の流れ関数は、 $\psi = 0$ である。 ($\because \ln 1 = 0$)

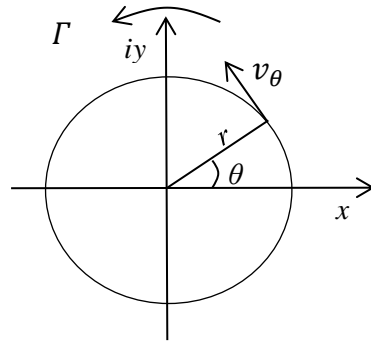
また、 ϕ の式より、どの流線 (円) も一回りするとき、 ϕ の値が $2\pi C$ 減少する。その向きは、 θ の増加する方向であり、反時計方向の流れとなる。



このように、『一本の流線に沿って、一回りするとき、すなわち、 ϕ の値が $2\pi C$ 減少するとき、その流線 (閉曲線) の循環の強さが、 C であるという。』

循環の値 Γ は

$$\Gamma = 2\pi C \quad (13.2')$$



$$C = rv_\theta$$

$$v_\theta = \frac{C}{r} \text{ (自由渦)}$$

C ; 循環の強さ

$$\left. \begin{aligned} \Gamma &= 2\pi C \\ \Gamma &= 2\pi r v_\theta \end{aligned} \right\} \quad (13.2')$$

$$\left. \begin{aligned} \phi &= -C\theta = -\frac{\Gamma}{2\pi}\theta \\ \psi &= C \ln r = \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r \end{aligned} \right\} \quad (13.2'')$$

<循環の複素ポテンシャル w の一つとして、次のものが使用されることがある。>

$$w = iC \ln\left(\frac{z}{a}\right) \quad (13.3)$$

これを書き直すと

$$w = iC \ln z - iC \ln a$$

第2項は定数だから、その微分をとると(13.1)式の微分と同じになる。したがって、流れのようすは、(13.1)式と同じになる。

(13.3)式を、実数部と虚数部に分けると

$$z = re^{i\theta}$$

$$\ln\left(\frac{z}{a}\right) = \ln\left(\frac{re^{i\theta}}{a}\right)$$

$$= \ln\frac{r}{a} + \ln e^{i\theta}$$

$$= \ln\frac{r}{a} + i\theta$$

$$\therefore w = iC \ln\left(\frac{z}{a}\right) = iC \ln\frac{r}{a} + i\theta iC = iC \ln\frac{r}{a} - C\theta$$

故

$$\text{ポテンシャル ; } \phi = -C\theta, \quad \text{流れ関数 ; } \psi = C \ln\frac{r}{a} \quad (13.4)$$

この流れは、 $r = a$ のとき

$$\psi = C \ln 1 = 0$$

となり、 $r = a$ の円 (流線) が、 $\psi = 0$ となるだけ (13.1) 式と異なる。

したがって、(13.4)式は、半径 a の円の外側の流れを表現するのに有利である。

＜一様な循環の強さの流れの場＞

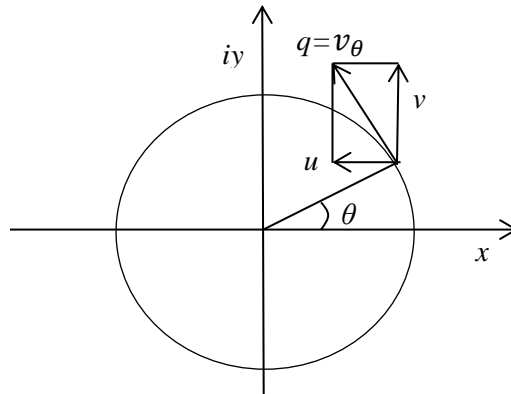
(13.1) 式で表される

$$w = iC \ln z$$

の流れは、前述のように、原点を中心とする無数の同心円を流線とする流れであり、どの流線も循環の強 C さは、一定である。

すなわち、(この平面) どの流線の循環の強さも一定値 C である。

このような流れの場を、『一様な循環の強さの場』という。



今、極座標を使用する。(r, θ)

半径方向の流速 ; v_r

接線方向の流速 ; v_θ

とすると

$$v_r = -\frac{\partial \phi}{\partial r} = -\frac{\partial}{\partial r}(-C\theta) = 0 \quad (\because C\theta = \text{const})$$

$$v_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta}$$

$$\therefore v_\theta = \frac{C}{r} \quad (13.5)$$

『すなわち、流れの方向は、円の接線方向であり、その流速は、中心からの半径 r に反比例する。この一様な循環の強さの流れは、一見渦のように見えるが、渦度 $\zeta = 0$ で渦なし流れである。このような流れを自由渦 free vortex と呼ぶ。』

それは、§5 で述べたように、速度ポテンシャル ϕ が存在することに起因する。

回転流れである流体機械のある場所では、このような回転流れになる領域が存在する。

次のように、直接証明できる。

(証明)

ζ ; z 軸まわりの回転角速度の成分

$$2\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

(4.6) 式より

$$\zeta = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

= ……

= ……

$$= \frac{1}{2} \left[\left(-\frac{C}{r^2} \cos^2 \theta - \frac{C}{r^2} \sin^2 \theta \right) - \left(-\frac{C}{r^2} \cos^2 \theta - \frac{C}{r^2} \sin^2 \theta \right) \right]$$

$$\therefore \zeta = 0$$

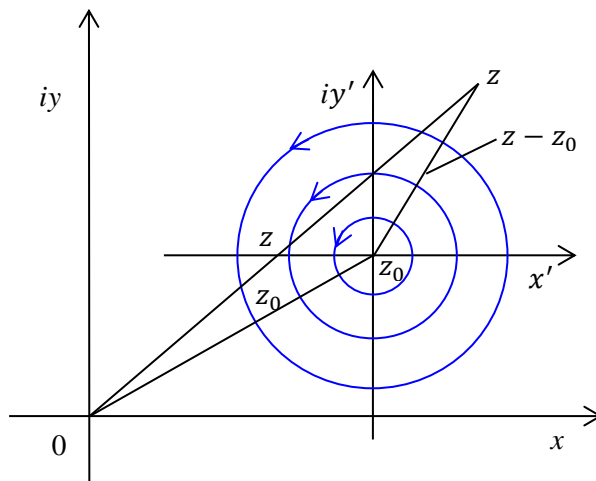
(13.6)

以上，証明終わり。

「この一様な循環の強さの流れは，一見渦のような流れであるが，今証明したように渦度 $\zeta = 0$ であって，明らかに渦なし流れである。」

<循環の中心が原点にないとき>

循環の中心が原点にないとき，この時の複素ポテンシャル w を考える。



円群の中心が $z_0 = x_0 + iy_0$ にあるときは，(10.1)式の座標の平行移動を行うことにより，複素ポテンシャル w は

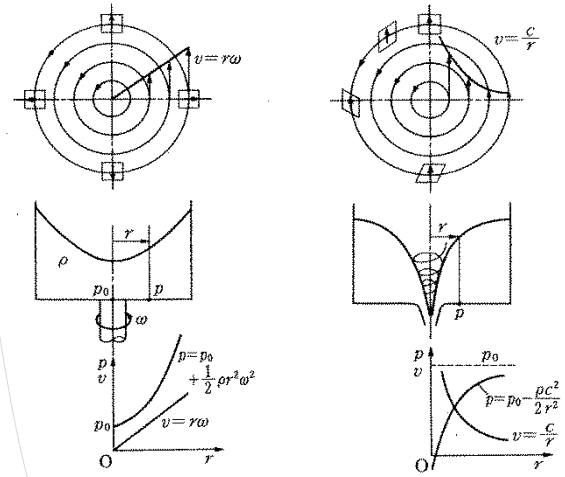
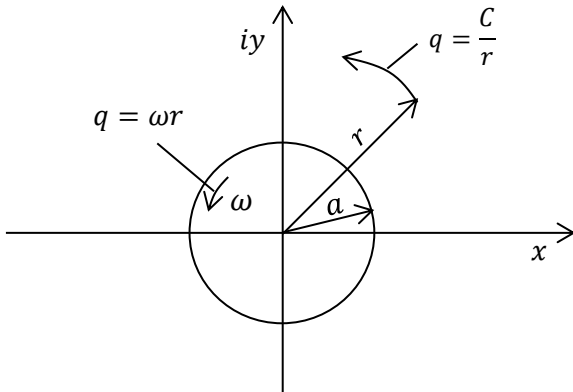
$$w = iC \ln(z - z_0) \quad (13.7)$$

となる。

ideal fluid4

§ 14 渦糸 Vortex filament

<強制渦と自由渦とからなる流れ>



<強制渦>

<自由渦>

ホームページ参照 ; [incompressible_fluid05-1](#)

半径 a の部分は、等角速度 ω で回転する**強制渦**であり、その外は循環の強さ C が一定の**自由渦**であるとする。

半径 a の円の内部では、流速 q は

$$q = \omega r \quad (\text{強制渦}) \quad (14.1)$$

このときの vorticity (渦度) をとると、(2.16) 式より

$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 2\omega = \text{const}$$

次に、半径 a の円に外側では、流速 q は

$$q = \frac{C}{r} \quad (\text{自由渦})$$

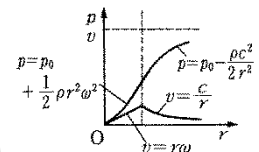
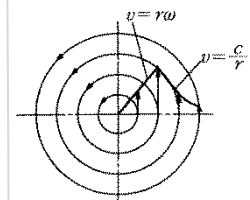
いま、円周上において、流速を q_a とすると

$$\begin{aligned} q_a &= \frac{C}{a} \\ \therefore C &= q_a \cdot a \\ \therefore q &= q_a \frac{a}{r} \end{aligned} \quad (14.2)$$

このとき

$$\zeta = 0$$

渦なし流れとなる。



<ランキンの組合わせ渦>

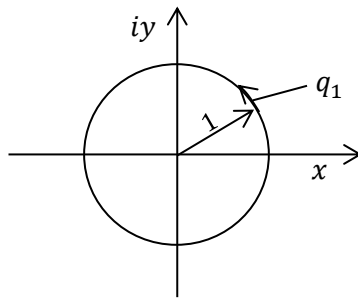
＜渦糸 Vortex filament＞

強制渦の大きさが無限小のとき，すなわち， $a \rightarrow 0$ の極限の場合を考え，これを **渦糸** (vortex filament) と呼ぶ。あるいは，単に **渦** (vortex) と呼ぶ人もいる。

流速 q は，(前図参照)

$$q = \frac{C}{r} \quad (14.3)$$

いま，半径 1 の円を考える。(単位円，unit circle)



流速 q は

$$q = q_1 \quad (14.3) \text{ 式より}$$

$$q_1 = \frac{C}{1}$$

$$\therefore C = q_1$$

あるいは

$$q = \frac{q_1}{r} \quad (14.4)$$

としてもよい。

このような渦糸を **強さ C (or q_1) の渦糸** と呼ぶ。

＜渦糸の複素ポテンシャル w は＞

前節 (13.3) 式より分かるように，

$$w = iC \ln(re^{i\theta}) = iC \ln z \quad (14.5)$$

で与えられる。

この (14.5) 式より，

$$\begin{aligned} w &= iC \ln(re^{i\theta}) \\ &= iC(\ln r + \ln e^{i\theta}) \\ &= iC \ln r + iC \cdot (i\theta) \end{aligned}$$

$$\therefore w = iC \ln r - C\theta$$

実数部と虚数部を比較すると

$$\therefore \phi = C\theta, \quad \psi = C \ln r \quad (14.6)$$

流速 q は

$$q = -\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = \frac{C}{r}$$

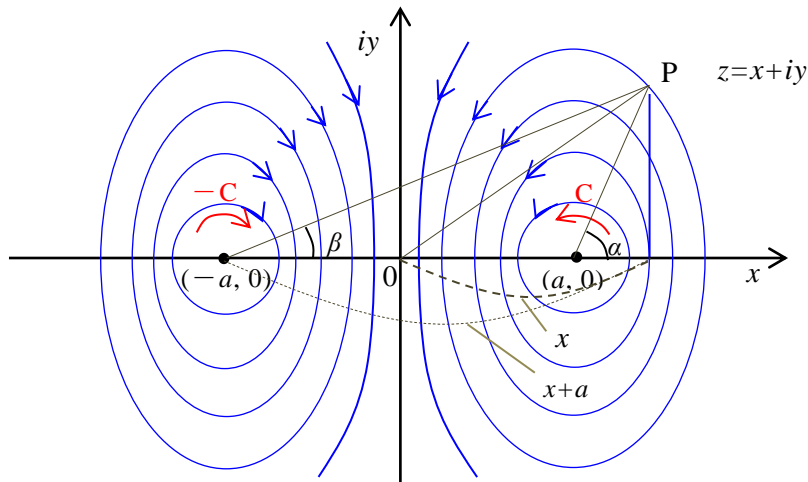
となり、(14.3) 式と同様になる。

すなわち、(14.5) 式の示す流れが渦糸であり、渦糸は中心に無限小の強制渦がある。全体として回転運動しているが、中心を除けばいたるところで $\zeta=0$ の渦なし流れである。

すなわち、前節で述べたように、一様な強さの循環の場である。

§ 15 湧き出しと渦

§ 16 平面壁と渦



x 軸上の $(a, 0)$ の所に、強さ C の渦があり、 y 軸が平面壁であるとする。この渦の鏡像として $(-a, 0)$ の点に強さ $-C$ の渦を考え、平面を取り除く。

右側の C の複素ポテンシャルは

$$w_1 = ic \ln(z - a)$$

左側の C の複素ポテンシャルは

$$w_2 = -ic \ln(z + a)$$

よって、全体の流れを表す複素ポテンシャル w は

$$w = w_1 + w_2 = iC \ln\left(\frac{z - a}{z + a}\right)$$

$$z - a = (x + iy) - a = (x - a) + iy = \overline{AP}e^{i\alpha}$$

$$z + a = (x + iy) + a = (x + a) + iy = \overline{BP}e^{i\beta}$$

したがって

$$\begin{aligned} w &= w_1 + w_2 \\ &= iC [\ln(z - a) - \ln(z + a)] \\ &= iC [\ln(\overline{AP}e^{i\alpha}) - \ln(\overline{BP}e^{i\beta})] \\ &= iC [(i\alpha + \ln \overline{AP}) - (i\beta + \ln \overline{BP})] \\ &= -C(\alpha - \beta) + iC \ln\left(\frac{\overline{AP}}{\overline{BP}}\right) \end{aligned} \quad (16.1)$$

したがって、実数部と虚数部を比較して、速度ポテンシャル ϕ と流れ関数 ψ は

$$\phi = -C(\alpha - \beta), \quad \psi = C \ln\left(\frac{\overline{AP}}{\overline{BP}}\right)$$

である。

$$\text{流線は, } \psi = a; \text{ const} \quad (16.2)$$

$$\text{すなわち, } \frac{\overline{AP}}{\overline{BP}} = \text{const} \quad (\text{この軌跡は, 円である。}) \quad (16.3)$$

この流線は、円群である。

任意の点の流速 q は

$$\begin{aligned}
 q^2 &= \frac{dw}{dz} \frac{d\bar{w}}{d\bar{z}} \\
 w &= ic \ln\left(\frac{z-a}{z+a}\right), \quad \bar{w} = -ic \ln\left(\frac{\bar{z}-a}{\bar{z}+a}\right) \\
 \frac{dw}{dz} &= ic \left[\frac{d}{dz} \ln(z-a) - \frac{d}{dz} \ln(z+a) \right] \\
 &= ic \left(\frac{1}{z-a} - \frac{1}{z+a} \right) \\
 &= \frac{i2Ca}{z^2 - a^2} \\
 \frac{d\bar{w}}{d\bar{z}} &= \frac{-i2Ca}{z^2 - a^2} \\
 q^2 &= \frac{dw}{dz} \frac{d\bar{w}}{d\bar{z}} = \frac{4a^2c^2}{(z^2 - a^2)(z^2 - a^2)} \\
 &= \frac{4a^2c^2}{(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) + a^4} \tag{16.4}
 \end{aligned}$$

この式より、流速は、原点が一番早いことになる。

壁上での流速 q_0 は

$x_0=0$ とおくと

$$\begin{aligned}
 q_0^2 &= \frac{4a^2c^2}{y^4 + 2a^2y^2 + a^4} = \frac{4a^2c^2}{(y^2 + a^2)^2} \\
 \therefore q_0 &= \frac{2ac}{y^2 + a^2} \tag{16.5}
 \end{aligned}$$

原点で； q_0 の最大値は、 $y^2 + a^2$ の最小値、すなわち、 $y=0$ のとき

$$\therefore q_0 = \frac{2c}{a} \tag{16.6}$$

<渦の移動速度>

このときは鏡像 B を考え、壁を取り除く。渦糸の強さ C は、自分自身を動かす力はない。したがって、 A を動かす力は、渦 B によるもののみである。渦 B による A 点に置ける速さ、すなわち、 A を動かす速さは、それを q とすると

$$q = \left| \frac{-C}{r} \right| = \frac{C}{2a}$$

すなわち、その渦の動く速さは、原点における流速 q_0 の $1/4$ であり、下方に向かう。

渦 B の移動速度も同様に、 A のみの作用であり、 $q = C/2a$ で、 A の速度に等しく、下方に向かう。これを、**vortex pair** という。