ideal fluid4

§10　円柱を過ぎる流れ

○ **完全流体（非粘性流体）の場合の円柱を過ぎる流れ**⇒上下左右の対称流である。

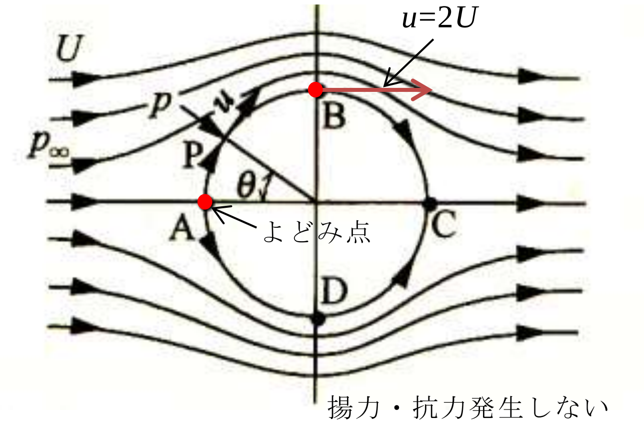
上下左右対称流
円柱には揚力・抗力は　作用しない

↓

実在・粘性流体と異なる

↓

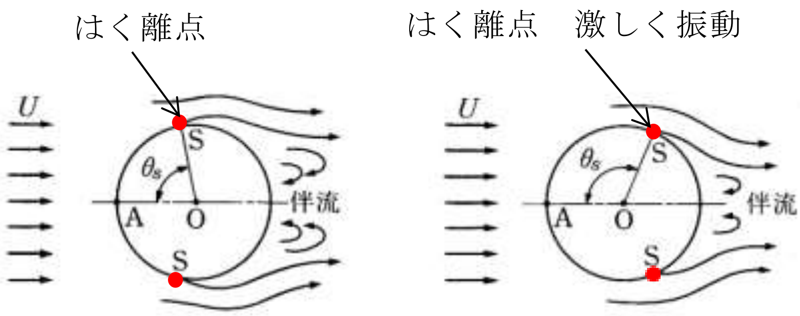
ダランベールのパラドックス



＜理想流体の円柱まわりの流れ＞

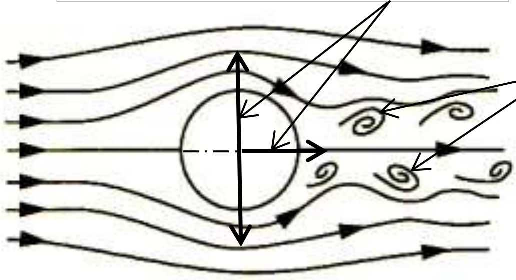
$\theta = 30° \rightarrow u = 2Usin30° = U$　　　$\theta = 90° \rightarrow u = 2Usin\theta = 2Usin90° = 2U$

○ **実在流体（粘性流体）の場合の円柱を過ぎる流れ**⇒揚力，抗力発生。



(a) 層流境界層　　　(b) 層流境界層

揚力・抗力作用⇒振動発生

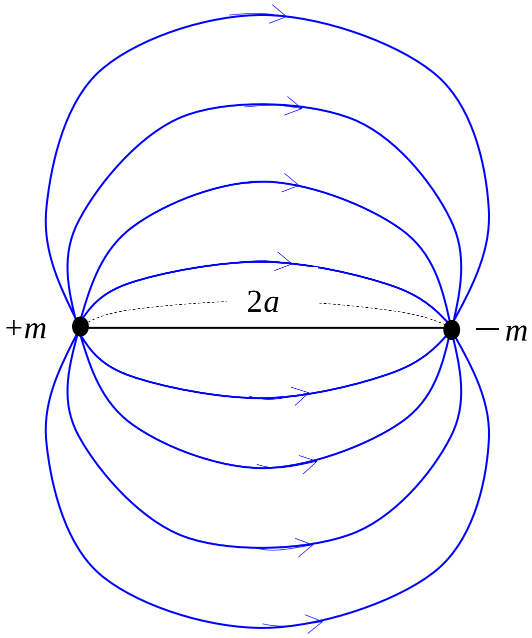


カルマン渦列
⇒上下交互に千鳥状の渦発生
⇒揚力，抗力発生，上下に振動

＜実在流体（粘性流体）の円柱まわりの流れ＞

＜二重吹き出し　doublet＞

(or 複源)



source ＋m と sink －m とが，2a の距離にあるものとする。

この a →0 の極限を考え，単純に今 a = 0 とすると，source と sink とは重なり，互いに打ち消し合って，共に存在しないのと同じである。

そこで，両者が極めて接近し，a→0 となるが

$$2am = M \qquad (10.1)$$

は，有限な一定値を保つものとする。

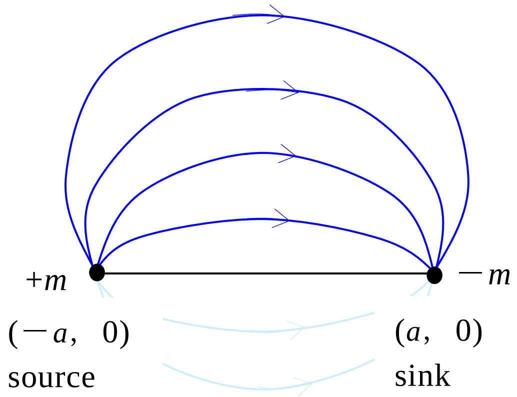
このような source と sink との組み合わせを **doublet（or 複源）** と呼び，M を**二重吹き出しの強さ（or 複源の強さ　doublet の強さ）**と呼ぶ。

また，source ＋m と sink －m とを結ぶ軸，を **doublet の軸** or **複源の軸**という。

この特殊の場合（複源が原点ある場合）を§7（例２）の（7.10）式に示した。

（ｉ）Doublet が原点にある場合

今，doublet が原点にある時の複素ポテンシャル w が，どのように表されるか考えてみよう。



（9.5）式より

$$w = -m\log(z - z_0)$$

だから

$$\begin{aligned} w &= w_1 + w_2 \\ &= -m\log(z+a) + m\log(z-a) \\ &= -m\{\log(z+a) - m\log(z-a)\} \\ &= -m\log\left(\frac{z+a}{z-a}\right) \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned} w_1 &= -m\log(z - z_0) \\ &= -m\log\bigl(z-(-a)\bigr) \\ &= -m\log(z+a) \\ w_2 &= -m\log(z - z_0) \\ &= m\log(z-a) \\ &(m = -m\text{だから}) \end{aligned}}$$

doublet が原点にあるときを考えるから

$$w = -\lim_{a\to 0}\left\{m\log\left(\frac{z+a}{z-a}\right)\right\}$$

$$w = -\lim_{a\to 0}\left\{m\log\left(\frac{1+\frac{a}{z}}{1-\frac{a}{z}}\right)\right\}$$

$$= -\lim_{a\to 0}\left[m\cdot 2\left\{\frac{a}{z} + \frac{\left(\frac{a}{z}\right)^3}{3} + \frac{\left(\frac{a}{z}\right)^5}{5} + \cdots\cdots\right\}\right]$$

$$= -\lim_{a\to 0}\left[m\cdot 2\cdot a\left\{\frac{1}{z} + \frac{a^2}{3z^3} + \frac{a^4}{5z^5} + \cdots\cdots\right\}\right]$$

$$= -M\frac{1}{z} \qquad (M = 2am)$$

$$= -\frac{M}{z} \tag{10.2}$$

これは，§７の（例２）（7.10）式と同じである。

注；$\log\dfrac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} + \dfrac{x^7}{7} + \cdots\cdots\right)$　　ただし，　$x < 1$ のとき

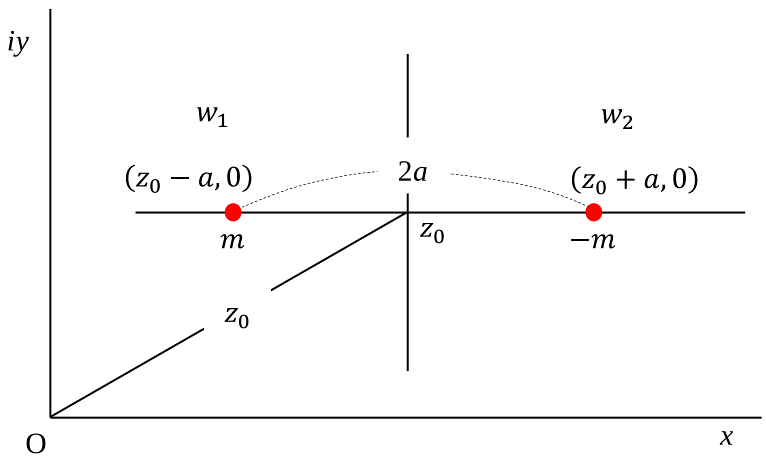
（ⅱ）doublet が原点以外にある場合

（すなわち，図に示すz_0 の点に doublet がある場合）

（9.5）式より

$$w = -m\log(z - z_0)$$

だから



$$\begin{aligned} w_1 &= -m\log(z - z_0) \\ &= -m\log\{z - (z_0 - a)\} \\ &= -m\log(z - z_0 + a) \\ w_2 &= -m\log\{z - (z_0 + a)\} \\ &= m\log(z - z_0 - a) \\ &\quad (m = -m\text{だから}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w &= w_1 + w_2 \\ &= -m\log(z - z_0 + a) + m\log(z - z_0 - a) \\ &= -m\{\log(z - z_0 + a) - \log(z - z_0 - a)\} \\ &= -m\log\left(\frac{z - z_0 + a}{z - z_0 - a}\right) \end{aligned}$$

$a \to 0$　を考えると

$$\therefore \quad w = -\lim_{a\to 0}\left\{m\log\left(\frac{z - z_0 + a}{z - z_0 - a}\right)\right\}$$

$$\begin{aligned} w &= -\lim_{a\to 0} m\log\left(\frac{1 + \dfrac{a}{z - z_0}}{1 - \dfrac{a}{z - z_0}}\right) \\ &= -\lim_{a\to 0} m\cdot 2\left\{\frac{a}{z - z_0} + \frac{1}{3}\left(\frac{a}{z - z_0}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{a}{z - z_0}\right)^5 + \cdots\cdots\right\} \\ &= -\lim_{a\to 0} m\cdot 2\cdot a\left\{\frac{1}{z - z_0} + \frac{1}{3}\frac{a^2}{(z - z_0)^3} + \frac{1}{5}\frac{a^4}{(z - z_0)^5} + \cdots\cdots\right\} \\ &= -\frac{M}{z - z_0} \end{aligned} \tag{10.3}$$

＜組み合わせ流れ（2）＞

＜一様流中にある Doublet がある場合＞

（ｉ）Doublet が原点にあるとき

・complex potential ; w
・一様流に対する　comlex potential ; w_1
・doublet（原点）に対する　comlex potential ; w_2

とすると

(7.9′)式より　　$w_1 = -Uz$　（一様流の複素ポテンシャル）とする。

(10.2)式より　　$w_2 = -\frac{M}{z}$　（二重吹き出しの複素ポテンシャル）とする。

したがって，両者の組合わせによる全体の複素ポテンシャル w は

$$w = w_1 + w_2$$

$$\therefore \quad w = -Uz - \frac{M}{z} \qquad (10.4)$$

となる。

この（10.4）式は，円を過ぎる流れを表す。

この式より，円を過ぎる流れを画いてみよう。

流れのようすを知るために，流れ関数 ψ を考える。

$$\begin{aligned} w &= -Uz - \frac{M}{z} \\ &= -U(x+iy) - \frac{M}{x+iy} \\ &= -U(x+iy) - \frac{M(x-iy)}{(x+iy)(x-iy)} \\ &= -U(x+iy) - \frac{M(x-iy)}{x^2+y^2} \\ &= -Ux - \frac{Mx}{x^2+y^2} - i\left(Uy - \frac{My}{x^2+y^2}\right) \end{aligned}$$

今，$w = \phi + i\psi$ だから，虚数部をとると

$$\psi = -Uy + \frac{My}{x^2+y^2} \qquad (10.5)$$

となり，これがこの場合の流れ関数となる。

（10.5）式は，ψ＝const 値（一定値）に対して，一本の流線となる。

特に，$\psi=0$ の流線は

$$-Uy+\frac{My}{x^2+y^2}=0$$

$$y\left(-U+\frac{My}{x^2+y^2}\right)=0 \qquad (a)$$

(a)式を満足する x, y の値は

ｉ） $y=0$ のとき　→　x＝不定　(b)

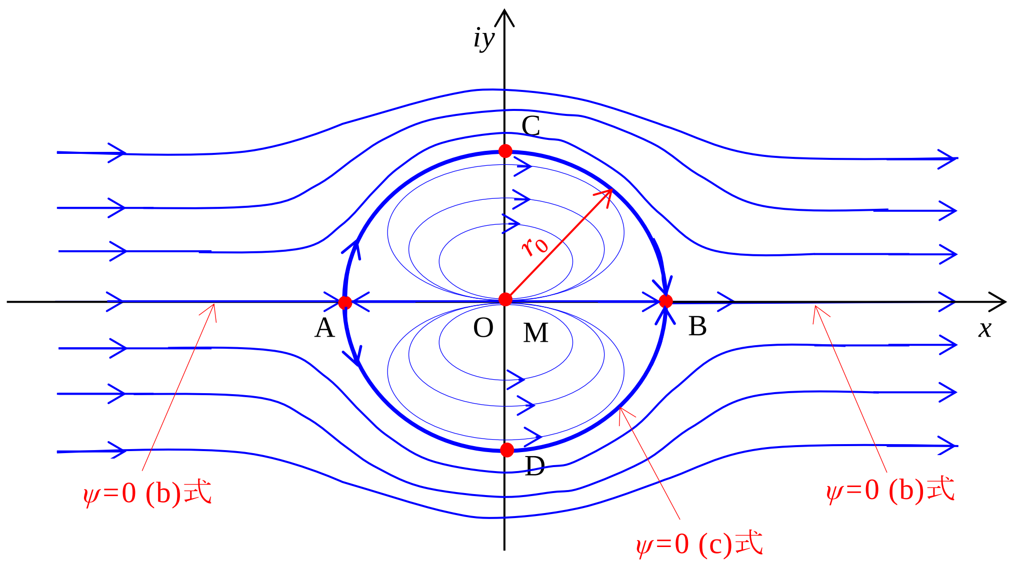
　　これは，x 軸そのものを表す。

ⅱ） $y\neq 0$ のとき

$$-U+\frac{My}{x^2+y^2}=0$$

$$\therefore \quad x^2+y^2=\frac{M}{U}=\left(\sqrt{\frac{M}{U}}\right)^2 \qquad (c)$$

この（c）式は原点を中心とし，半径 $r_0=\sqrt{M/U}$ の円を表す。



$$r_0=\sqrt{\frac{M}{U}}$$

すなわち，（c）式の流線を個体で置き換えると，一様流の中にある円を過ぎる流れと考えることができ，（10.4）式が円を過ぎる流れを表す。

（c）式より

$$x^2+y^2=\frac{M}{U}=\left(\sqrt{\frac{M}{U}}\right)^2={r_0}^2$$

$$\therefore \quad M={r_0}^2U \qquad (d)$$

となる。

したがって，一様な流れ（流速 U）の中に半径r_0 の円がある（中心が原点）ときの複素ポテンシャル w を求めるには，原点に強さ$M = {r_0}^2U$ の doublet を置いた場合と同等である。

故，円を過ぎる複素ポテンシャル w は

$$w = -Uz - \frac{M}{z}$$

$$= -Uz - \frac{{r_0}^2U}{z}$$

$$\therefore \quad w = -U\left(z + \frac{{r_0}^2}{z}\right) \tag{10.6}$$

で与えられる。

＜次に，円周上での流速はどのようになるかを考える。＞

（10.5）式の ψ の式を，極座標（r, θ ）で書くと

$$\psi = -Ur\sin\theta + \frac{Mr\sin\theta}{r^2}$$

$$= -U\left(r - \frac{{r_0}^2 r}{r^2}\right)\sin\theta$$

$$= -U\left(r - \frac{{r_0}^2}{r}\right)\sin\theta \tag{10.7}$$

$$\psi = -Uy + \frac{My}{x^2+y^2}$$

$$y = r\sin\theta$$

$$x^2+y^2 = r^2$$

$$M = {r_0}^2U$$

故，円周上での流速 q は，円周上では，$r = r_0$ だから

$$q = -\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)_{r=r_0}$$

$$q = \left[U\left(1 + \frac{{r_0}^2}{r^2}\right)\sin\theta\right]_{r=r_0}$$

$$\therefore \quad q = 2U\sin\theta \tag{10.8}$$

で与えられる。

（例題１）

（ｉ）点 A，B の stagnation point の流速 q を求めよ。

（解） 点 A ; $\theta = \pi$

点 B ; $\theta = 0$

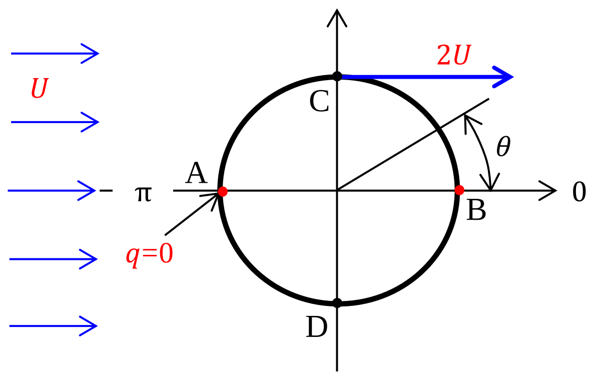
だから，点 A，B ともに

$$\therefore \quad \sin\theta = 0$$

したがって，流速は

$q = 0$

となる。



（ⅱ）点 C，D では，最大流速となる。その流速 q を求めよ。

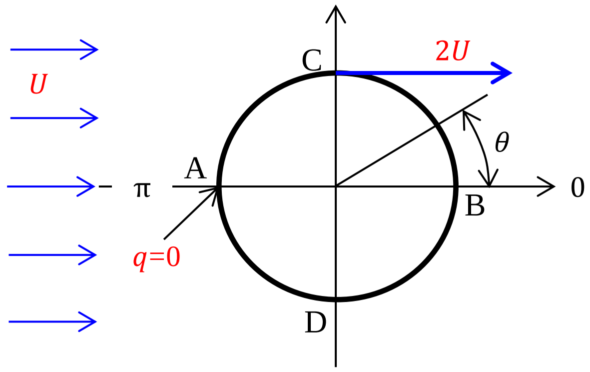
（解）　点 C；$\theta=\pi/2$　　　　　　　→ $\sin\theta=1$

　　　　点 D；$\theta=3\pi/2$，$-\pi/2$　　　→ $\sin\theta=-1$

したがって，

$$q=|\pm 2U|$$
$$=2U$$

となる。



（ⅲ）$q=U$ となる点を求めよ。

（解）（10.8）式より

$$q=2U\sin\theta$$

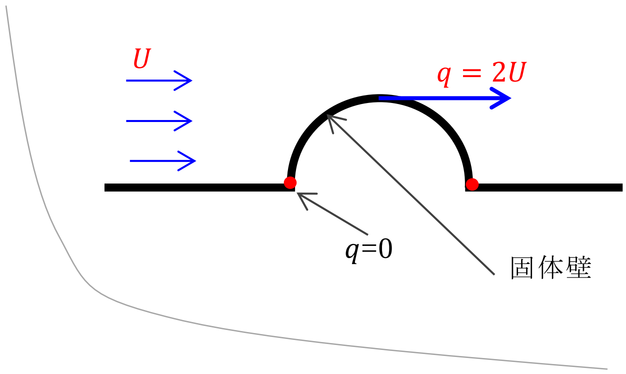
だから

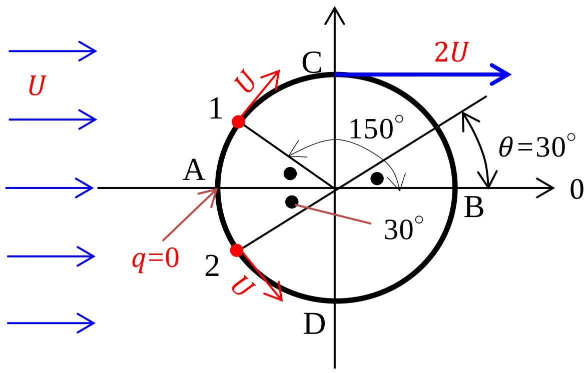
$$\therefore\ U=2U\sin\theta$$

$$\therefore\ \sin\theta=\frac{1}{2}$$

となる。したがって

$\theta=30^\circ$，150°，・・・・・





この考えは，３孔ピトー管に応用される。理論的には，1，2 点は静圧を示す。

$$q=\sqrt{\frac{2(p_t-p_s)}{\rho}}$$

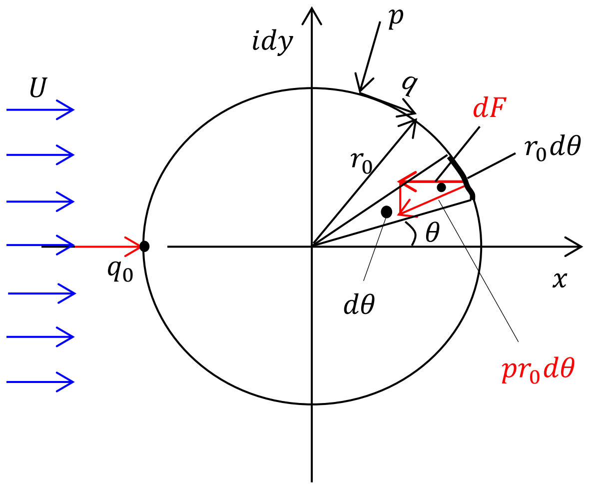
A 点；全圧　p_t

1，2 点；静圧　p_s

が測定される。

＜円柱の抵抗（D'Alembert's Paradox の逆説 or 背理）＞

円柱にはたらく力 $\boldsymbol{F}$ を求めよ。(完全流体の場合)



q；円周上の流速
p；円周上の静圧
p_0；全圧（stagnation point）
Bernoulli の定理より（円周上で）

$$\frac{p}{\rho}+\frac{1}{2}q^2=\frac{p_0}{\rho}$$

$$\therefore \quad p=p_0-\frac{1}{2}\rho q^2 \qquad （静圧＝全圧－動圧）$$

ただし，
p_0　；$q=0$ の点(stagnation point)の圧力
すなわち，全圧

円柱の単位長さにはたらく圧力 F（水平方向）は，微小なる（$d\theta$）部分への圧力を dF とすると

$$dF=-p\cdot r_0 d\theta\cdot\cos\theta$$

$q=2U\sin\theta$
$\int_0^{2\pi}\cos\theta\cdot d\theta=0$

故

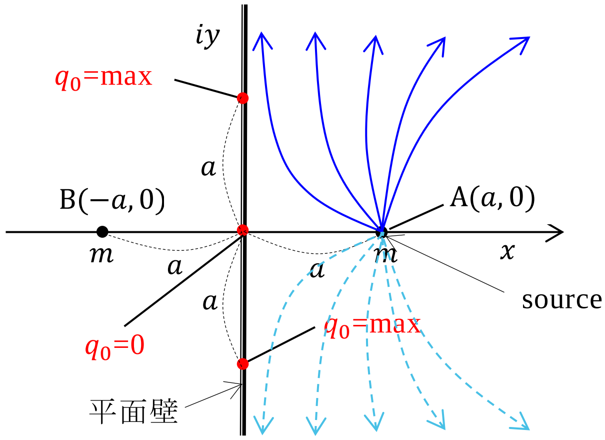
$$
\begin{aligned}
dF&=\int df\\
&=-\int_0^{2\pi}p\cdot r_0\cos\theta\cdot d\theta\\
&=-r_0\int_0^{2\pi}\left(p_0-\frac{1}{2}\rho q^2\right)\cos\theta\cdot d\theta\\
&=-r_0\left[p_0\int_0^{2\pi}\cos\theta\cdot d\theta-\frac{\rho}{2}\int_0^{2\pi}q^2\cdot\cos\theta\cdot d\theta\right]\\
&=-r_0\left[p_0\int_0^{2\pi}\cos\theta\cdot d\theta-\frac{\rho}{2}\int_0^{2\pi}4U^2\sin^2\theta\cdot\cos\theta\cdot d\theta\right]\\
&=\frac{1}{2}r_0\rho\cdot 4U^2\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\cdot\cos\theta\cdot d\theta\\
&=2\rho\cdot U^2 r_0\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\cdot(d\sin\theta)\\
&=2\rho\cdot U^2 r_0\left|\frac{1}{3}\sin^3\theta\right|_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\\
&=0
\end{aligned}
$$

$$\therefore \quad F=0 \qquad (10.10)$$

すなわち，「一様流中に置かれた円柱にはたらく力 $\boldsymbol{F}$ は，**0** である。」⇒（完全流体の場合）

§11　平面壁と湧き出し および 鏡像

平面壁および source を，図のようにとる。



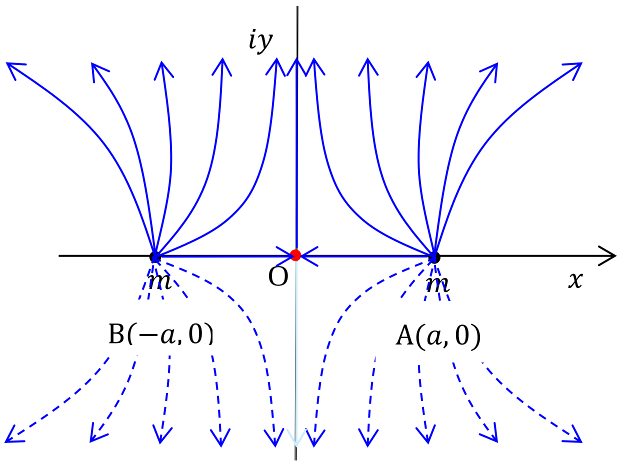
＜鏡　像＞Image

平面壁を y 軸にとり，source m が x 軸上にあるとする。

壁と m との距離を a とする。m の座標を A(a , 0)とする。

今，A(a , 0)と対称の位置 B(－a , 0)に，等しい強さの source m があると考えると，壁面を取り除いたものと考えてよい。

この source B が，壁面に対する**鏡像** Image である。



or 換言すると，

「運動している流体内において，もしそれを横切っては流れないような曲面を作ることができるとする。この曲面の両側における湧き出し source，吸い込み sink，複源 doublet は，この曲面に対して，互いに**鏡像**になっていると考えてよい。

このような場合には，この曲面を個体壁で置き換えて，一方の流体を取り除いても残りの流体の運動には，なんの変化も起こらない。」

今，点 A での complex potential w_1は，（9.5）式より

$$w_1 = -m\log(z-a)$$

点 B での complex potential w_2は

$$w_2 = -m\log(z+a)$$

となるから，全体の complex potential w は

$$\begin{aligned} w &= w_1 + w_2 \\ &= -m\log(z-a) - m\log(z+a) \\ &= m\log(z^2-a^2) \end{aligned} \qquad (11.1)$$

で与えられる。

〇**任意の点における speed q は**, (7.8)式より複素速度dw/dzと共役複素速度$d\bar{w}/d\bar{z}$の積で求められるから

$$w = -m\log(z^2-a^2)$$

共役なものは,

$$\bar{w} = -m\log(\bar{z}^2-a^2)$$

となる。

$$\therefore \quad \frac{dw}{dz} = \frac{-2mz}{z^2-a^2}, \qquad \frac{d\bar{w}}{d\bar{z}} = \frac{-2m\bar{z}}{\bar{z}^2-a^2}$$

$$\begin{aligned} \therefore \quad q^2 &= \frac{dw}{dz}\cdot\frac{d\bar{w}}{d\bar{z}} \\ &= \frac{4m^2 z\cdot\bar{z}}{(z^2-a^2)(\bar{z}^2-a^2)} \end{aligned}$$

一方，$z = x+iy$， $\bar{z} = x-iy$ だから

$$z\cdot\bar{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2+y^2$$

また,

$$(z^2-a^2)(\bar{z}^2-a^2) = z^2\cdot\bar{z}^2 - a^2(z^2+\bar{z}^2) + a^4$$

$$z^2\cdot\bar{z}^2 = (x^2+y^2)^2$$

$$\begin{aligned} z^2+\bar{z}^2 &= (x+iy)^2 + (x-iy)^2 \\ &= x^2+2ixy-y^2+x^2-2ixy-y^2 \\ &= 2(x^2-y^2) \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} q^2 &= \frac{dw}{dz}\cdot\frac{d\bar{w}}{d\bar{z}} \\ &= \frac{4m^2 z\cdot\bar{z}}{(z^2-a^2)(\bar{z}^2-a^2)} \\ &= \frac{4m^2(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2-2a^2(x^2-y^2)+a^4} \end{aligned} \qquad (11.2)$$

or

$$q=\frac{4m^2(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2+2a^2(x^2+y^2)+a^4-4a^2x^2}$$
$$=\frac{4m^2(x^2+y^2)}{(x^2+y^2+a^2)^2-(2ax)^2}$$
$$=\frac{4m^2(x^2+y^2)}{(x^2+y^2+a^2+2ax)(x^2+y^2+a^2-2ax)}$$
$$=\frac{4m^2(x^2+y^2)}{\{(x+a)^2+y^2\}\{(x-a)^2+y^2\}} \qquad (11.2')$$

より求められる。

〇 特に，平面壁上での流速 q_0 は，(11.2')式で x=0 とおくと

$$q_0{}^2=\frac{(2my)^2}{(y^2+a^2)^2}$$

$$\therefore \qquad q_0=\left|\frac{2my}{y^2+a^2}\right| \qquad (11.3)$$

〇次に，原点（x=0,　y=0）では，上式(11.3)式より

$q_0=0$　　⇒　すなわち，stagnation point である。

〇また，壁上の無限遠（y→＋∞ 壁の上，or　y→－∞ 壁の下）では，(11.3)式より

$$q_0=\lim_{y\to\infty}\left|\frac{2my}{y^2+a^2}\right|=\lim_{y\to\infty}\left|\frac{2m}{y+\dfrac{a^2}{y}}\right|=0$$

〇次に q_0 の極大値を求めると，y ＞ 0 のとき，(11.3)式より

$$q_0=\frac{2my}{y^2+a^2}$$

となる。

$\dfrac{dq_0}{dy}=0$　のとき，q_0は，極大値をとるから

$$\frac{dq_0}{dy}=\frac{2m(y^2+a^2)-2y\cdot 2my}{(y^2+a^2)^2}=\frac{2m(a^2-y^2)}{(y^2+a^2)^2}$$

故

$$(a^2-y^2)=0$$
$$\therefore\ y=\pm a$$

故

$y=a$　→　このとき　$q_0\Rightarrow max$

上下対称

$y=-a$　→　このとき　$q_0\Rightarrow max$

となる。

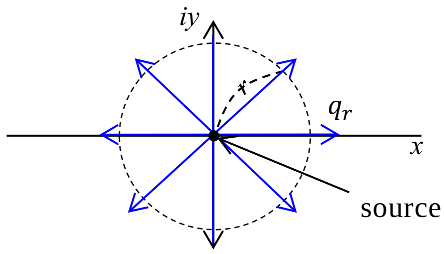
〇Source の移動速度
平面の前面にある source は，どちらへどのような速さで動かされるか考えてみよう。

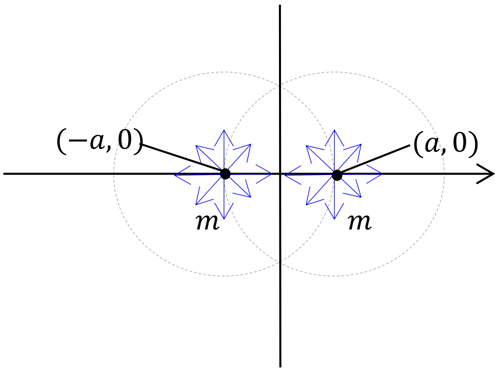
（ヒント）
単位時間に原点より湧き出す流量 Q は，(9.1)式より
$$Q = 2\pi r \cdot q_r = 2\pi \cdot m \qquad （m；吹き出しの強さ）$$
である。
$$\therefore\ q_r = \frac{Q}{2\pi r} = \frac{2\pi \cdot m}{2\pi r} = \frac{m}{r}$$
今，$r = 2a$ とすると
$$\therefore\ q_r = \frac{m}{r} = \frac{m}{2a}$$

A にはたらく力は，B によるもの
B による A 点の速度；q

$$q = \frac{m}{r} = \frac{m}{2a} \qquad (11.4)$$

・・・・・・・・・
・・・・・・・・・
・・・・・・・・・

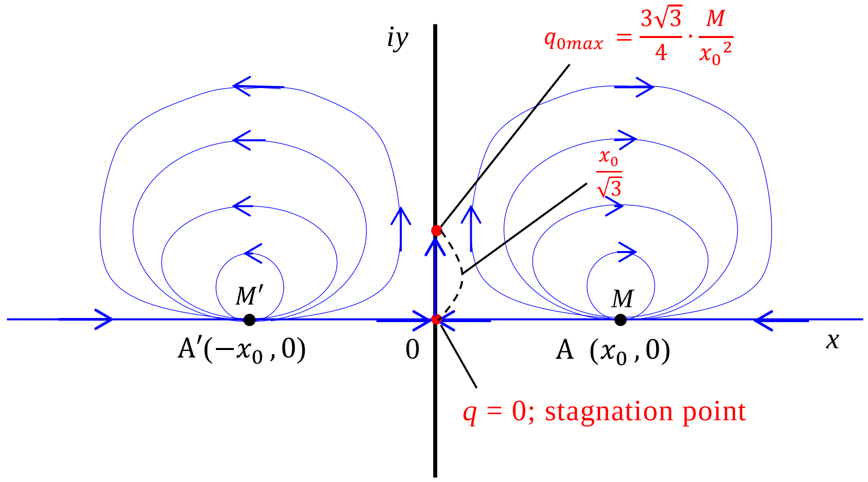




原点より，吹き出す流量は
$$Q = 2\pi r \cdot q_r$$
$$\therefore q_r = \frac{Q}{2\pi r} = \frac{2\pi m}{2\pi r} = \frac{m}{r}$$
いま，$r = 2a$
$$\therefore q_r = \frac{m}{2a}$$

(9.1)式より
$$Q = 2\pi m$$
$$\therefore m = \frac{Q}{2\pi}$$

§ 12　平面壁と Doublet



平面壁を y 軸にとり，図のように，x 軸上の点 $\mathrm{A}(x_0, 0)$ に強さ M の doublet があるものとし，このときの流れを解明してみよう。

・doublet（二重吹き出し，複源）の強さ；M

・doublet の軸は，平面壁に垂直

とする。

原点 0 に対し点 $\mathrm{A}\,(x_0, 0)$ と対称な点$\mathrm{A}'\,(-x_0, 0)$ に，M と強さが等しく，向きの反対な doublet M' があるとして，平面壁を取り除いて考えてよい。

すなわち，この場合の鏡像 Image M'を考える。

（2.10.3）式より，強さ M の doublet による complex potential w_1 は

$$w_1 = -\frac{M}{z - x_0}$$

強さM'の doublet による complex potential w_2 は

$$w_2 = -\frac{M'}{z + x_0}$$

故，M'は M と等しく向きが反対であるから

$$M' = -M$$

$$w_2 = \frac{M}{z + x_0}$$

したがって，全体の流れを表す complex potential w は

$$\begin{aligned} w &= w_1 + w_2 \\ &= -\frac{M}{z - x_0} + \frac{M}{z + x_0} \\ &= -\frac{M(z - x_0)}{(z - x_0)^2} + \frac{M(z + x_0)}{(z + x_0)^2} \\ &= -\frac{M(z - x_0)(z + x_0)^2 + M(z + x_0)(z - x_0)^2}{(z - x_0)^2(z + x_0)^2} \end{aligned}$$

$$w = -\frac{M\{(z-x_0)(z+x_0)^2-(z+x_0)(z-x_0)^2\}}{(z-x_0)^2(z+x_0)^2}$$

$$= -\frac{M(z-x_0)(z+x_0)\{(z+x_0)-(z-x_0)\}}{(z-x_0)^2(z+x_0)^2}$$

$$= -\frac{M\{(z+x_0)-(z-x_0)\}}{(z-x_0)(z+x_0)}$$

$$\therefore \quad w = \frac{-2Mx_0}{z^2-{x_0}^2} \qquad (12.1)$$

となる。

○次に，平面壁上の任意の点の流速 q は

$$q^2 = \frac{dw}{dz}\frac{d\overline{w}}{d\bar{z}}$$

だから

$$w = \frac{-2Mx_0}{z^2-{x_0}^2}, \qquad \overline{w} = \frac{-2Mx_0}{\bar{z}^2-{x_0}^2}$$

$$w = \frac{2Mx_0\cdot 2z}{(z^2-{x_0}^2)^2}, \qquad \overline{w} = \frac{2Mx_0\cdot 2\bar{z}}{(\bar{z}^2-{x_0}^2)^2}$$

$$= \frac{4Mx_0\cdot z}{(z^2-{x_0}^2)^2}, \qquad = \frac{4Mx_0\cdot \bar{z}}{(\bar{z}^2-{x_0}^2)^2}$$

$$\therefore \quad q^2 = \frac{4^2M^2{x_0}^2\cdot z\cdot \overline{z}}{(z^2-{x_0}^2)^2(\bar{z}^2-{x_0}^2)^2}$$

いま，$z\cdot\overline{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2+y^2$

$$(z^2-{x_0}^2)\ (\bar{z}^2-{x_0}^2) = (x^2-y^2+2ixy-{x_0}^2)(x^2-y^2-2ixy-{x_0}^2)$$

$$= \{(x^2-y^2-{x_0}^2)+2ixy\}\{(x^2-y^2-{x_0}^2)-2ixy\}$$

$$= (x^2-y^2-{x_0}^2)^2+4x^2y^2$$

故

$$q^2 = \frac{4^2M^2{x_0}^2\cdot z\cdot\overline{z}}{\{(x^2-y^2-{x_0}^2)^2+4x^2y^2\}^2}$$

$$= \left\{\frac{4Mx_0\sqrt{x^2+y^2}}{(x^2-y^2-{x_0}^2)^2+4x^2y^2}\right\}^2 \qquad (12.2)$$

○原点における流速は

x=0 ， y=0 だから

$$q^2 == \left\{\frac{0}{{x_0}^4}\right\}^2$$

$$\therefore \quad q = 0$$

したがって，原点は，stagnation point となる。

○無限遠における流速は

$x \to \infty \quad , \qquad y \to \infty$

$q = \frac{\infty}{\infty^4} = 0$

となる。

○平面壁上での流速$\boldsymbol{q_0}$ は

（12.2）式で　x=0 とすると，

$$q^2 = \left\{\frac{4Mx_0y}{(-y^2 - {x_0}^2)^2 + 0}\right\}^2 = \left\{\frac{4Mx_0y}{(y^2 + {x_0}^2)^2}\right\}^2 \qquad (12.3)$$

故，　$y = 0$　；　$q^2 = 0$　⇒ stagnation point

$y = \infty$　；　$q^2 = \left(\frac{\infty}{\infty^4}\right)^2 = 0$

○平面壁上で流速の最大の点が存在する。$\boldsymbol{q_0}$ の最大点を求めると

$$q_0 = \left|\frac{4Mx_0y}{(y^2 + {x_0}^2)^2}\right|$$

q_0の max は，dq_0/dy=0 だから

$$\frac{dq_0}{dy} = \frac{4Mx_0(y^2 + {x_0}^2)^2 - 4Mx_0y \cdot 2(y^2 + {x_0}^2) \cdot 2y}{(y^2 + {x_0}^2)^4}$$

・・・・・

・・・・・

$$= \frac{4Mx_0({x_0}^2 - 3y^2)}{(y^2 + {x_0}^2)^3}$$

∴　${x_0}^2 - 3y^2 = 0$

∴　$y^2 = \frac{1}{3}{x_0}^2$

$$\therefore \quad y = \pm\frac{x_0}{\sqrt{3}} \qquad (12.4)$$

○最大流速$\boldsymbol{q_{0max}}$　は

$$(q_{0max})_{y=\frac{x_0}{\sqrt{3}}} = \frac{4Mx_0y}{(y^2 + {x_0}^2)^2}$$

$$= \frac{4Mx_0 \cdot \frac{x_0}{\sqrt{3}}}{\left(\frac{{x_0}^2}{3} + {x_0}^2\right)^2}$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{M}{{x_0}^2}$$