

ideal fluid3

- § 7 複素ポテンシャル **complex potential** ----- (p40-52)
 or 複素速度ポテンシャル **complex velocity potential**
 or ポテンシャル関数 **potential function**
 複素ポテンシャル 複素速度ポテンシャル
 複素平面 複素数 複素速度 実数部 虚数部
 <複素ポテンシャル **complex potential** の例題> (例1) ~ (例5)
 複素ポテンシャル 一様流 円群の流線群 二重吹き出し **doublet**
 極座標 直角双曲線の流れ 平面壁に沿う流れ
 双曲線群の流れ オリフィスを過ぎる流れ
- § 8 よどみ点 **Stagnation Point** ----- (p53-56)
 分岐流線 よどみ点 複素速度 共役複素速度
 <よどみ点に関する例題> (例1) (i) ~ (iii)
 よどみ点 平面壁に沿う流れ 角部 複素速度 共役複素速度
- § 9 湧き出し (吹き出し) と吸い込み **Source & Sink** ----- (p57-64)
 湧き出し 吹き出し 吸い込み **source sink**
 一点からの湧き出し 速度ポテンシャル 流れ関数 ポテンシャル関数
 湧き出しの強さ 組み合わせの流れ 鈍頭物体まわりの流れ

§ 7 複素ポテンシャル complex potential

or 複素速度ポテンシャル complex velocity potential

or ポテンシャル関数 potential function

前述 (§ 5,6) したように、二次元渦なし流れにおいては、速度ポテンシャル ϕ と流れ関数 ψ とが共に存在する。すなわち、このような流れ (完全流体) に対しては、(6.5) 式に示した Cauchy-Riemann の式が成立する。

ここで、速度ポテンシャル ϕ を実数部とし、流れ関数 ψ を虚数部とする複素関数

$$w = \phi + i\psi \quad (7.1)$$

を考える。

この w を **複素ポテンシャル complex potential** (or **複素速度ポテンシャル complex potential velocity**) という。

二次元ポテンシャル流れに対しては、この w を使用するのが有力な手段である。その理由は、複素数の等式が実数部と虚数部とがそれぞれ等しいということを表す点にある。

(例) $a + ib = c + id$

すなわち、

$$a = c$$

$$b = d$$

となる。

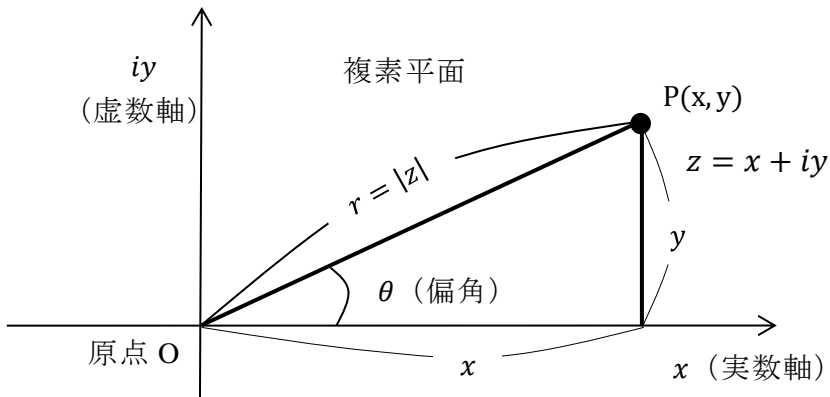
＜複素平面＞

今、二次元流れの平面を複素平面 x - y で表し、任意の点 $P(x,y)$ の座標を

$$z = x + iy \quad (7.2)$$

z ; 複素数

とする。



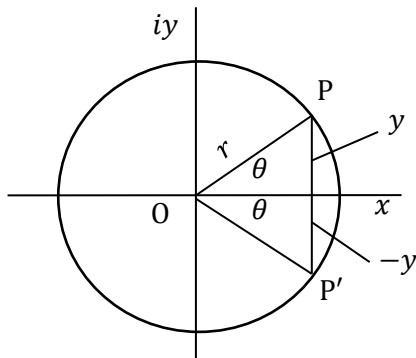
$$\begin{aligned} z &= x + iy \\ \text{or } z &= r e^{i\theta} \\ \theta &= \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \\ r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ r &; z \text{ の絶対値} \end{aligned}$$

$\overline{OP} = r$ とし、偏角を θ とすると、(7.2) 式は

$$z = r e^{i\theta} \quad (7.3)$$

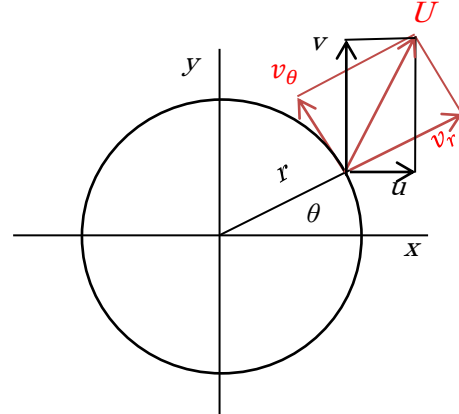
とも表される。

したがって、 w を z の関数とする。



$$\begin{aligned} z_{(P)} &= x + iy \\ &= r \cos \theta + i r \sin \theta \\ &= r (\cos \theta + i \sin \theta) \\ &= r e^{i\theta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_{(P')} &= x - iy \\ &= r \cos \theta - i r \sin \theta \\ &= r (\cos \theta - i \sin \theta) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} u &= v_r \cos \theta - v_\theta \sin \theta \\ v &= v_\theta \cos \theta + v_r \sin \theta \end{aligned}$$

<次に、任意の点の速度が、どのように表されるかを考える。>

(7.1) 式の全微分をとると

$$(w = \phi + i\psi)$$

$$\begin{aligned} dw &= \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy \\ &= \frac{\partial}{\partial x}(\phi + i\psi)dx + \frac{\partial}{\partial y}(\phi + i\psi)dy \\ &= \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} + i\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} + i\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)dy \\ &= (-u + iv)dx + (-v - iu)dy \\ &= (-u + iv)dx + i(iv - u)dy \quad (i^2 = -1) \\ &= (-u + iv)(dx + idy) \end{aligned}$$

今

$$z = x + iy$$

$$\therefore dz = dx + idy$$

だから

$$\therefore dw = (-u + iv)dz$$

$$\therefore -\frac{dw}{dz} = u - iv \quad (7.4)$$

この $-dw/dz$ を複素速度といい、実数部が u 、虚数部が $-v$ を表す。

したがって、実数部と虚数部を求めることによって、速度成分 u 、と v を求めることができる。

次に、流速 q speed q (scalar 量) がどのように表されるか考えてみよう。

w の共役なものを \bar{w} とする。(共役な複素ポテンシャル, すなわち, 虚数部の符号を変えたもの)

$$\bar{w} = \phi - i\psi \quad (7.5)$$

z の共役なものを \bar{z} とする。

$$\bar{z} = x - iy \quad (7.6)$$

となる。

(7.5) の微分をとると

$$\begin{aligned} d\bar{w} &= \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} dx + \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} dy \\ &= \frac{\partial}{\partial x} (\phi - i\psi) dx + \frac{\partial}{\partial y} (\phi - i\psi) dy \\ &= \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} - i \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) dx + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} - i \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) dy \end{aligned}$$

$$= (-u - iv)dx + (-v + iu)dy \quad (6.5) \text{より}$$

$$= -(u + iv)dx + i(iv + u)dy \quad (i^2 = -1)$$

$$= -(u + iv)(dx - idy)$$

$$\text{今, } \bar{z} = x - iy$$

$$d\bar{z} = dx - idy \quad \text{だから}$$

$$\therefore d\bar{w} = -(u + iv)d\bar{z}$$

$$\therefore -\frac{d\bar{w}}{d\bar{z}} = u + iv \quad (7.7)$$

すなわち, $-\frac{d\bar{w}}{d\bar{z}}$ の 実数部が u であり, 虚数部が v である。

(7.4), (7.7) より, 速度の絶対値は

$$\frac{dw}{dz} \frac{d\bar{w}}{d\bar{z}} = (u - iv)(u + iv) = u^2 + v^2 = q^2 \quad (q: \text{speed}) \quad (7.8)$$

＜複素ポテンシャル complex potential の例題＞

(例題 1) 複素ポテンシャル w に関する例題。

(イ) 複素ポテンシャル w が、次式で示される流れを求めよ。

$$w = -(u_0 - iv_0)z \quad (7.9)$$

ただし、 u_0, v_0 は、定数。

(解) 複素速度は；

$$\therefore -\frac{dw}{dz} = u_0 - iv_0$$

となる。

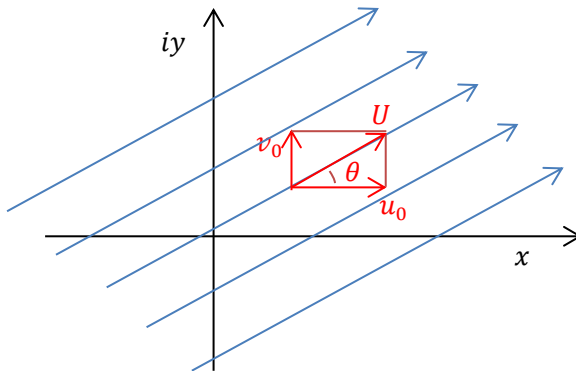
したがって、(7.4) と対応して

$$\left(-\frac{dw}{dz} = u - iv \quad (7.4)\right)$$

$$u = u_0 = U \cos \theta$$

$$v = v_0 = U \sin \theta$$

一様流となる。



or 極座標；

$$w = -Ue^{-i\theta}z$$

$$= -U(\cos \theta - i \sin \theta)z$$

$$= -(U \cos \theta - U \sin \theta i)z$$

(ロ) また、 $v_0 = 0$ のときの流れは、
水平な方向の一様流となる。

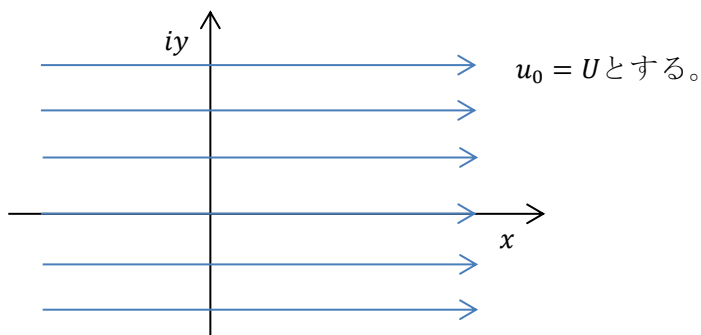
($\theta = 0^\circ$, or 180° のとき)

複素ポテンシャル w は

$$w = -u_0z$$

$$\therefore w = -Uz$$

(7.9')



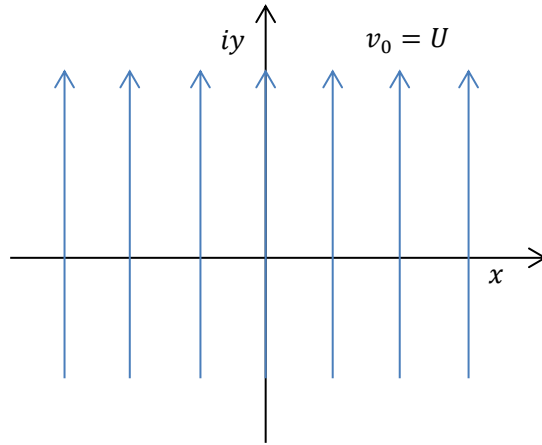
(ハ) また, $u_0 = 0$ のときの流れは
垂直な方向の一様流となる。

($\theta = 90^\circ$, or 270° のとき)

$$w = iv_0z$$

$$\therefore w = iUz$$

(7.9'')



(例題 2)

$$w = \frac{A}{z} \quad (7.10)$$

で示される複素ポテンシャル w は、どのような流れとなるか。

(解) $w = \phi + i\psi \quad z = x + iy$

$$\therefore w = \frac{A}{x + iy} = \frac{A(x - iy)}{(x + iy)(x - iy)} = \frac{Ax - iAy}{x^2 + y^2}$$

故、実数部と虚数部を対応させると

速度ポテンシャル ; $\phi = \frac{Ax}{x^2 + y^2}$ 流れ関数 ; $\psi = -\frac{Ay}{x^2 + y^2}$

流れのようすを見るために、流れ関数 ψ を考える。

$$\psi = -\frac{Ay}{x^2 + y^2}$$

$$\psi(x^2 + y^2) + Ay = 0$$

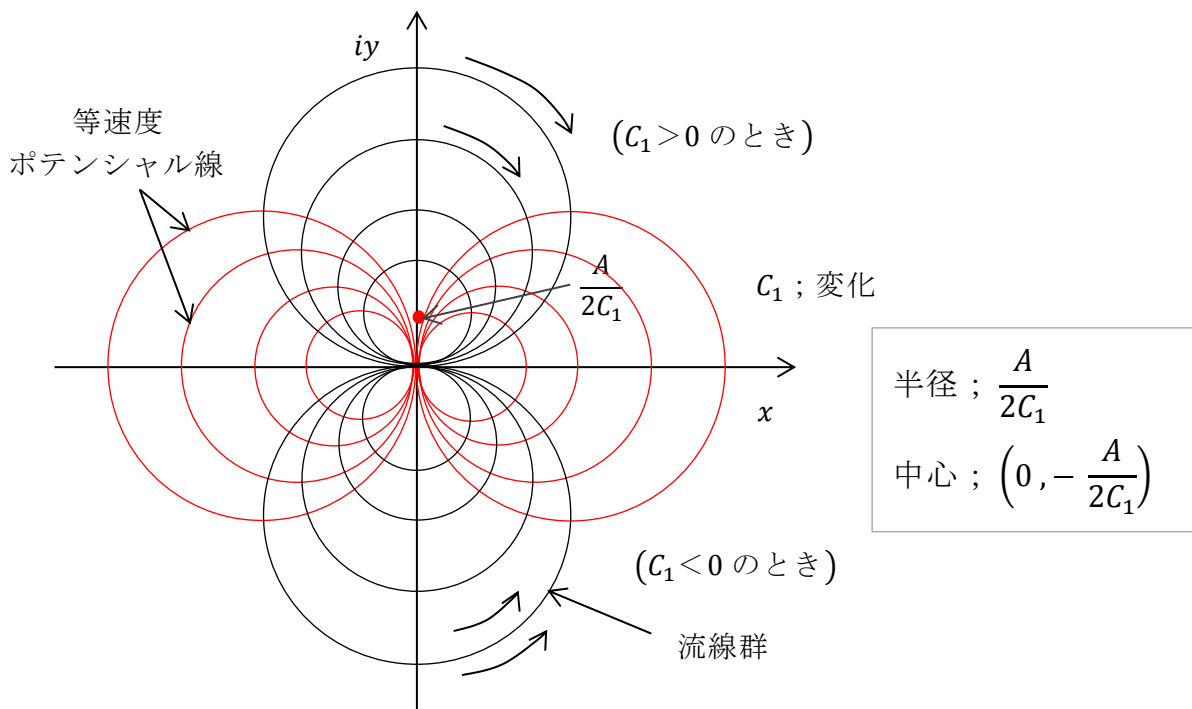
この式は、 $\psi = \text{const}$ ならば、円の方程式を表しているから、 $\psi = \text{const}$ の流線群に対して、円群を表す。

$\psi = C_1$ とおくと

$$x^2 + y^2 + \frac{A}{C_1}y = 0$$

$$x^2 + \left\{ y^2 + \frac{A}{C_1}y + \left(\frac{A}{2C_1}\right)^2 \right\} = \left(\frac{A}{2C_1}\right)^2$$

$$x^2 + \left(y + \frac{A}{C_1}\right)^2 = \left(\frac{A}{2C_1}\right)^2 \quad \dots \dots \dots (a)$$



すなわち、(a) 式は、円の方程式であるから、流線群はいずれも円群となる。

そして、図のように、円群は原点 (0,0) で x 軸に接し、x 軸に対称な、しかも円中心は、y 軸上にある。

すなわち

$$\text{半径は, } \frac{A}{2C_1}$$

$$\text{中心は, } \left(0, -\frac{A}{2C_1}\right) \text{ の円群となる。}$$

このような流れを

doublet (二重吹き出し)

という。(§9 で詳述 一般的な doublet について)

また、速度ポテンシャルの線は

$$\phi(x^2 + y^2) - Ax = 0$$

同様に

$\phi = C_2$ とおくと

$$x^2 + y^2 - \frac{A}{C_2}x = 0$$

$$\left(x - \frac{A}{2C_2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{A}{2C_2}\right)^2$$

となるから

$$\text{半径は, } \frac{A}{2C_2}$$

$$\text{中心は, } \left(\frac{1}{2C_2}, 0\right)$$

の円群で、y 軸に接し、中心が x 軸上にある y 軸に対称な円となる。(図中の赤で示した円群)

< 円の方程式 >

一般に

$$x^2 + y^2 = r^2$$

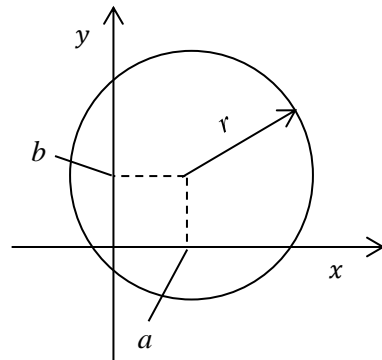
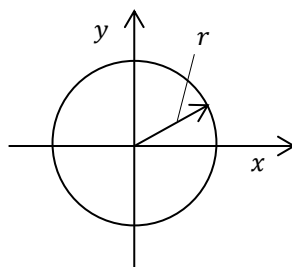
$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

or

一般に

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

が円の方程式である。



(例題 3)

$$w = Az^n \quad (7.11)$$

で示される複素ポテンシャル w の流れを求めよ。ただし、 $n > 0$ とする。 A ; 実数

(解) 極座標 r, θ を使用すると

$$\begin{aligned} z &= x + iy \\ &= r\cos\theta + ir\sin\theta \\ &= r(\cos\theta + i\sin\theta) \\ &= re^{i\theta} \\ w &= A(r\cos\theta + ir\sin\theta)^n \\ &= Ar^n(\cos\theta + i\sin\theta)^n \\ &= Ar^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) \\ &= Ar^n\cos n\theta + iAr^n\sin n\theta \end{aligned}$$

三角関数で n 乗のときは、ドモアブルの定理の応用が有利。

一方、 $w = \phi + i\psi$ だから、実数部と虚数部を比較して、

$$\text{速度ポテンシャル ; } \phi = Ar^n\cos n\theta, \quad \text{流れ関数 ; } \psi = Ar^n\sin n\theta \quad (7.12)$$

(i) $n = 1$ の場合、(7.11), (7.12) 式は

$$w = Az \text{ となり}$$

$$\phi = Ar\cos\theta = Ax$$

$$\psi = Ar\sin\theta = Ay$$

となる。

等ポテンシャル線は、 $x = \text{const}$

流線は、 $y = \text{const}$

また、複素速度 dw/dz は、(7.4) 式より

$$\frac{dw}{dz} = A = -(u - iv) \text{ だから}$$

故、実数部と虚数部を比較して

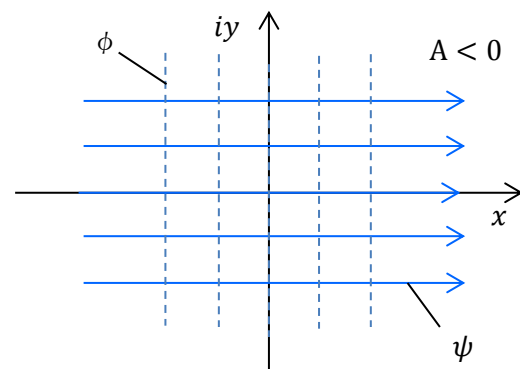
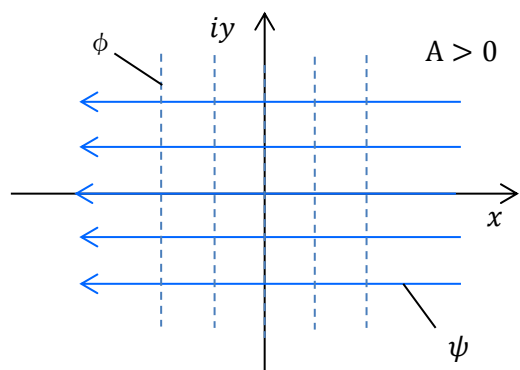
$$-u = A$$

$$v = 0$$

となる。

$A > 0$ ならば、 x 軸に平行で負の流れ。

$A < 0$ ならば、 x 軸に平行で正の流れとなる。



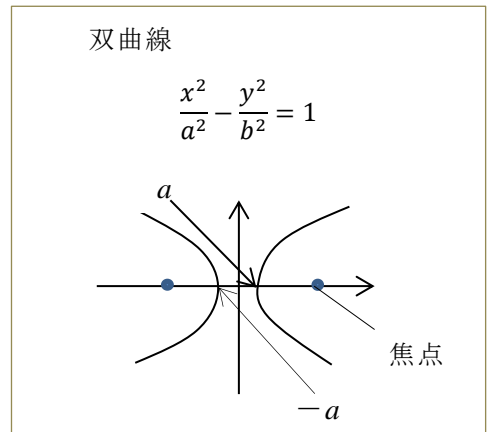
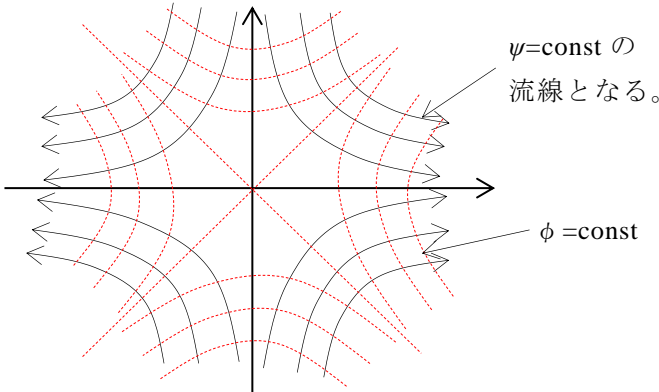
(ii) $n=2$ のとき, 複素速度, 速度ポテンシャル, 流れ関数は
 $w = Az^2 = A(x + iy)^2 = A(x^2 - y^2) + 2iAxy$ ($z = x + iy = re^{i\theta}$)

$\phi = Ar^2 \cos 2\theta = A(x^2 - y^2)$; 速度ポテンシャル (実数部)

$\psi = Ar^2 \sin 2\theta = 2Axy$; 流れ関数 (虚数部) → §6 (例題 2) 参照

となる。したがって

$\phi = \text{const}$, $\psi = \text{const}$ の曲線はともに, **直角双曲線** となる。



(iii) $n = \pi/\alpha$ のとき
 第 1, 2 象限を考える。

$\sin n\theta$	0	1	0
$n\theta$	0	$\pi/2$	π
θ	0	$\pi/2 \cdot n$	π/n

角を α とすると

$$\pi/n = \alpha \quad \therefore n = \pi/\alpha$$

故 $w = Az^{\pi/\alpha}$

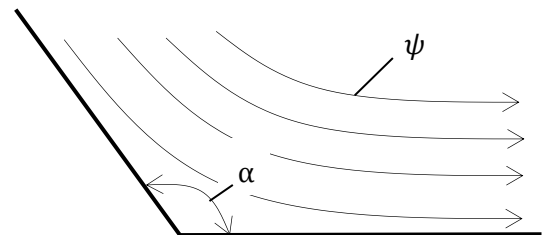
$$\phi = Ar^{\pi/\alpha} \cos \frac{\pi}{\alpha} \theta$$

$$\psi = Ar^{\pi/\alpha} \sin \frac{\pi}{\alpha} \theta$$

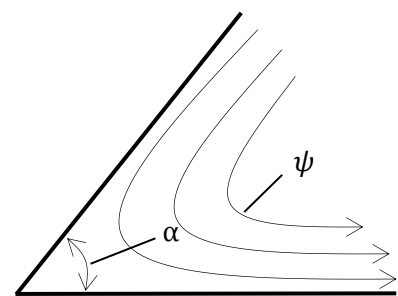
この流れは, α の角をなす平面壁に沿うものとなる。

$\alpha < 180^\circ$ ($n > 1$) のとき ⇒ (イ), (ロ) の流れ

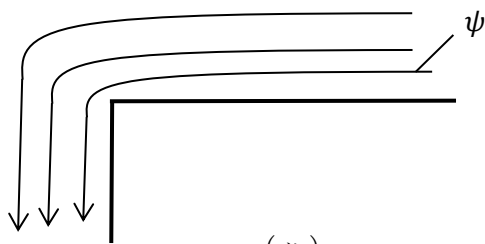
$\alpha > 180^\circ$ ($n < 1$) のとき ⇒ (ハ), (ニ) の流れ



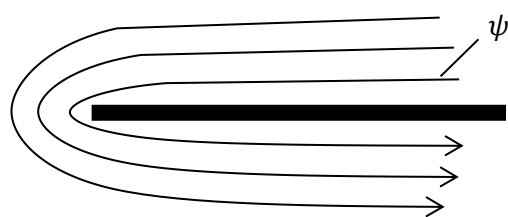
(イ)



(ロ)



(ハ)



(ニ)

(iv) $n=3$ のとき

$$\alpha = \pi/n = 180^\circ / 3 = 60^\circ$$

流れ関数

$$\psi = Ar^3 \sin 3\theta$$

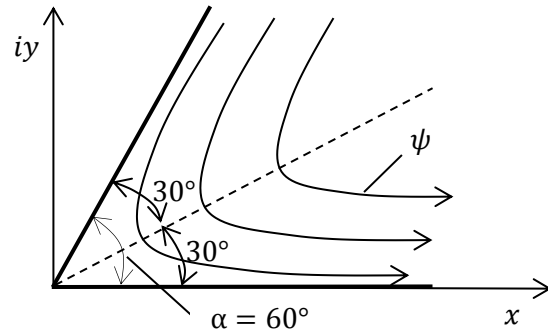
となる。

流線 $\psi = \psi_1$ を考える。

$\sin 3\theta$ が max のとき $\Rightarrow \theta = 30^\circ$

$\sin 3\theta$ が小のとき $\Rightarrow r^3$ は大

$\sin 3\theta$ が大のとき $\Rightarrow r^3$ は小



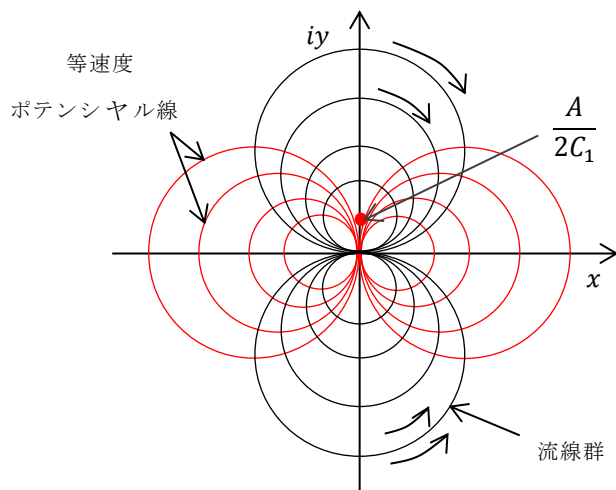
(v) $n=-1$ のとき

速度ポテンシャル

$$w = Az^{-1}$$

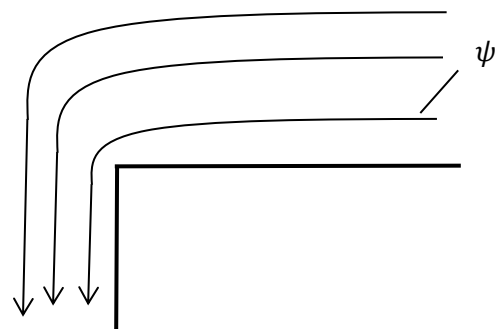
$$= \frac{A}{z}$$

となり, (例題 2) の (7.10) 式と同式であるから, 流れは円となる。



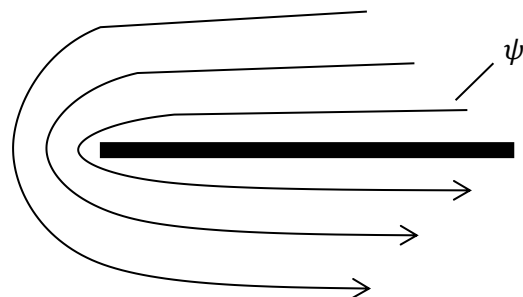
(vi) $n = 2/3$ のとき

$\alpha > 180^\circ$ すなわち, $n < 1$ のとき



(vii) $n = 1/2$ のとき

$\alpha > 180^\circ$ すなわち, $n < 1$ のとき



(例題 4)

$$w = iAz^2 \quad (7.13)$$

は、どのような流れか。

(ヒント) (例 3) の $n=2$ の例題で、 i をかけたものであるから、実数部、虚数部が入れ替わったことになる。

故、軸を 90° 回転させたことになる。

(例題 5)

$$z = C \cosh w \quad (7.14)$$

は、どのような流れとなるか。 C ; 実の実数

$$\text{(解)} \quad z = x + iy \quad w = \phi + i\psi$$

$$x + iy = C \cosh(\phi + i\psi)$$

$$= C\{\cosh \phi \cosh(i\psi) + \sinh \phi \sinh(i\psi)\}$$

$$= C(\cosh \phi \cos \psi + i \sinh \phi \sin \psi)$$

実数部と虚数部を比較すると

$$\text{実数部 ; } x = C \cosh \phi \cos \psi$$

$$\text{虚数部 ; } y = C \sinh \phi \sin \psi \quad (\text{a})$$

(a) 式より、流れ関数 ψ を求める。(ψ を消去して)

$$\cosh \phi = \frac{x}{C \cos \psi}$$

$$\sinh \phi = \frac{y}{C \sin \psi}$$

$$\cosh^2 \phi - \sinh^2 \phi = \frac{x^2}{C^2 \cos^2 \psi} - \frac{y^2}{C^2 \sin^2 \psi} = 1 \quad (\text{b}) \quad \text{となる。}$$

$\psi = \psi_1 = \text{const}$ とすると

$$C^2 \cos^2 \psi = C^2 \sin^2 \psi = \text{const}$$

故、(b) 式は、**双曲線群**となる。

$$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}), \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

$$\sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} + e^{-ix}), \cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$$

$$\sinh(ix) = \frac{1}{2}(e^{ix} - e^{-ix}) = i \sin x$$

$$\cosh(ix) = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) = \cos x$$

したがって、 $\psi = \text{const}$ より、一本の流線が得られ、それはすべて双曲線となる。

その中の一組を個体で置き換えると、二次元のオリフィスを通る流れとなる。

なお、極端な場合として、 $\psi = 0$, $\psi = \pi$ のときは、赤線で示した厚みのない流れとなる。

$\psi = 0$ のとき、(a) 式より $y = 0$

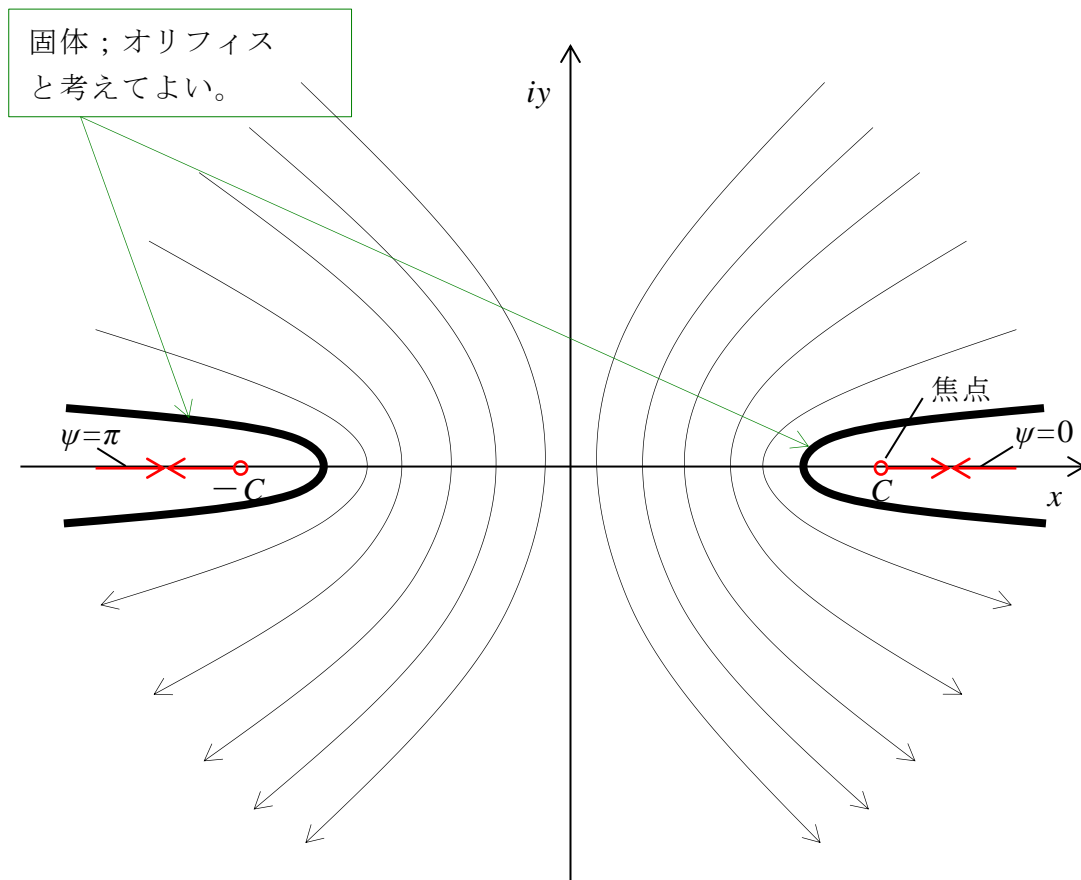
$$x = C \cos \phi, \quad x \gg C$$

故、 x 軸上の $+C$ より 右側の流れとなる。

$\psi = \pi$ のとき、(a) 式より $y = 0$

$$x = -C \cosh \phi, \quad x \ll -C$$

故、 x 軸上の $-C$ より 左側の流れとなる。

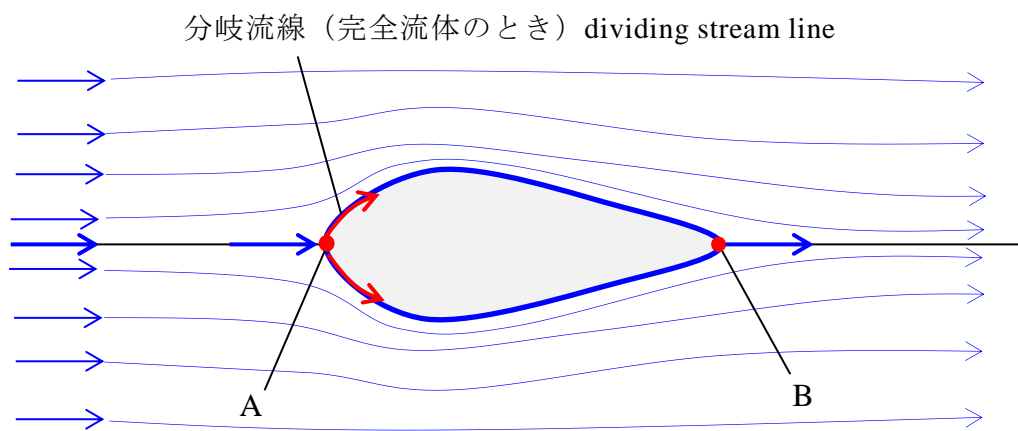


§ 8 よどみ点 Stagnation Point

図のように、点 A, B の流速がゼロとなる点を **よどみ点** stagnation point と呼ぶ。特に、完全流体、低レイノルズ数のときに後方によどみ点ができる。

Stagnation point において、二本に分かれる流線を**分岐流線**と呼ぶ。

分岐流線は、steady 状態で考えたとき 1/2 ずつ分岐すると考えるが、実際には、上下に交互の割合で分岐する。



点 A, B を Stagnation point という。

Stagnation point では

$$q = 0 \quad (q; \text{speed}) \quad (8.1')$$

だから、(7.8) 式より

$$\frac{dw}{dz} \frac{d\bar{w}}{d\bar{z}} = u^2 + v^2 = q^2 = 0$$

故

$$\frac{dw}{dz} = 0 \quad \text{or} \quad \frac{d\bar{w}}{d\bar{z}} = 0 \quad (8.1)$$

すなわち、(7.15) 式に示す **複素速度** dw/dz , or **共役複素速度** $d\bar{w}/d\bar{z}$ がゼロとなる点が、**よどみ点** Stagnation point である。

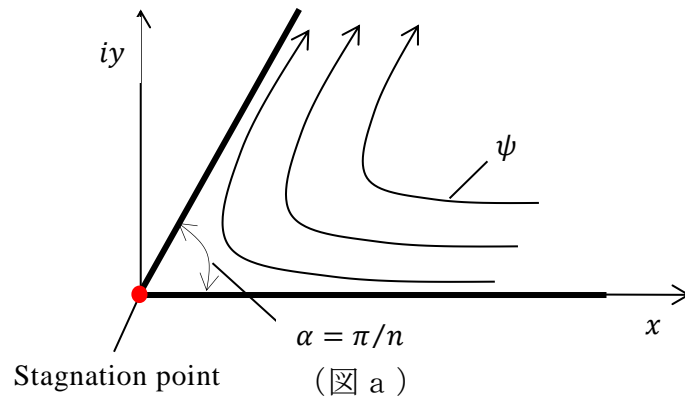
＜よどみ点に関する例題＞

(例題 1) (7.11) 式

$$w = Az^n$$

で、 $n = \pi/\alpha$ を考えると、前例の (iii) に示すように、平面壁に沿う流れとなる。この場合の Stagnation point を求めよ。また、Stagnation point の存在しない場合は、その角部での流速を求めよ。

(解)



複素速度は、 $\frac{dw}{dz} = Anz^{n-1}$ となる Stagnation point では $\frac{dw}{dz} = 0$ だから

$$\therefore \frac{dw}{dz} = Anz^{n-1} = 0$$

$$\therefore z^{n-1} = 0$$

となる。

(i) $n > 1$ のとき ($n - 1 > 0$) $\alpha < 180^\circ$ で、上図 (a) の流れ

故、 $z=0$ となる。 (イ)

すなわち、 $x=0, y=0$ で $z=0$ となるから

$n > 1$ のとき、原点が stagnation point となる

(ii) $n < 1$ のとき ($n - 1 < 0$) $\alpha > 180^\circ$ で、図 (b) の流れ

今、 $n - 1 = -m$ とおくと (ただし、 $m > 0$)

$$z^{-m} = 0$$

$$\therefore \frac{1}{z^m} = 0$$

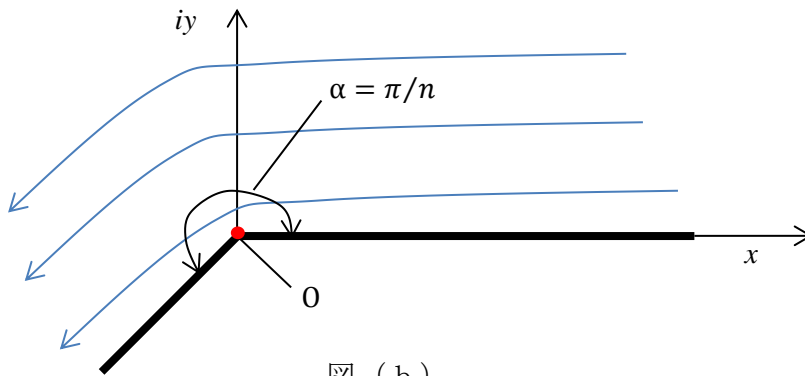
$\therefore z = \infty$ でなければならない。 (ロ)

故、 z が無限大の位置に、stagnation point があることになる。

すなわち、有限の領域内には、stagnation point は、存在しない。

(iii) $n < 1$ のとき, $\alpha > 180^\circ$ となるから, 図 (b) の流れとなる。

$z = \infty$ で stagnation point は, 存在しないから, 原点 (角部) 0 での流速を求めて見よう。



$$\begin{aligned} n-1 &= -m \\ \therefore n &= 1-m \quad (m > 0) \end{aligned}$$

図 (b)

(解) 原点 0 での流速は

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dz} &= Anz^{n-1} \\ &= A(1-m)z^{-n} \\ &= \frac{A(1-m)}{z^m} \\ \therefore \left(\frac{dw}{dz}\right)_{z=0} &= \infty \text{ となる。} \end{aligned}$$

また, $\bar{w} = A\bar{z}^n$

故, 共役な複素速度は

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{w}}{d\bar{z}} &= An\bar{z}^{n-1} \\ &= A(1-m)\bar{z}^{-m} \\ &= \frac{A(1-m)}{\bar{z}^m} \\ \therefore \left(\frac{d\bar{w}}{d\bar{z}}\right)_{\bar{z}=0} &= \infty \end{aligned}$$

故, (7.8) 式より

$$\frac{dw}{dz} \frac{d\bar{w}}{d\bar{z}} = u^2 + v^2 = q^2$$

だから

$$q^2 = \infty$$

$$\therefore q = \infty \quad \text{となる。} \quad (二)$$

故, 原点 0 での流速は, 無限大となる。

or (別解)

$$\begin{aligned}
 q^2 &= \frac{dw}{dz} \frac{d\bar{w}}{d\bar{z}} \\
 &= \frac{A(1-m)}{z^m} \frac{A(1-m)}{\bar{z}^m} \\
 &= \frac{A^2(1-m)^2}{z^m \bar{z}^m} \\
 &= \frac{A^2(1-m)^2}{(z \cdot \bar{z})^m}
 \end{aligned}$$

今

$$\begin{aligned}
 z &= x + iy, \bar{z} \equiv x - iy \\
 \therefore z \cdot \bar{z} &= (x + iy)(x - iy) \\
 &= x^2 + y^2 \\
 \therefore q^2 &= \frac{A^2(1-m)^2}{(x^2 + y^2)^m} \\
 \therefore (q^2)_{x=0, y=0} &= \infty
 \end{aligned}$$

だから

故, 原点における流速は, ∞ となる。(完全流体のとき)

§ 9 湧き出し (吹き出し) と吸い込み

Source & Sink

二次元流れにおいて、流体が一点より四方へ対称的に流出する流れを**湧き出し** source という。この source から、単位時間に流出する流体の体積 (流量, 単位深さ当たり, すなわち, 奥行き 1 とする。) が, $2\pi m$ であるとき, m を**湧き出しの強さ** (strength of the source) と呼ぶ。

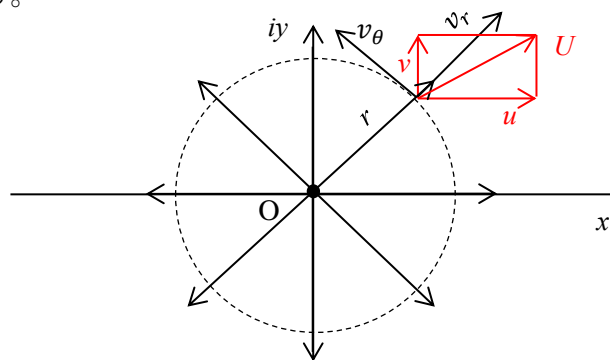
この m が負であるとき, すなわち, 一点へ流れ込むとき, **吸い込み** sink と呼ぶ。

<一点からの湧き出し>

(i) 吹き出し (湧き出し) が原点にある場合を考える。

今, 原点 O から湧き出しを考え, この湧き出し source のポテンシャル関数を求める。

(解) ヒント ; 湧き出しの速度ポテンシャル ϕ は (5.12) 式, 流れ関数 ψ は (6.8) 式に示してある。



$$v_\theta = q_\theta$$

$$v_r = q_r$$

radial 方向の速度 ; v_r

tangential 方向の速度 ; v_θ

とすると, (§ 5 例 (5) の (ハ) を See)

$$v_r = -\frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{Q}{2\pi r}$$

$$v_\theta = -\frac{\partial \phi}{r \partial \theta} = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = 0 \quad (\text{a})$$

となり

単位時間に原点より湧き出す流量 Q は,

$$Q = 2\pi r \cdot v_r = 2\pi \cdot m$$

となる。

$$\therefore m = \frac{Q}{2\pi} \quad (9.1)$$

m ; **湧き出しの強さ (吹き出しの強さ)** という。

or Q そのものを, **湧き出しの強さ** という。

今、ポテンシャル関数 w は

$$w = \phi + i\psi$$

だから、それぞれ ϕ , ψ を求める。

速度ポテンシャル ϕ は、(5.12), (9.1) 式より

$$\begin{aligned}\phi &= -\frac{Q}{2\pi} \log r \\ &= -m \log r\end{aligned}\tag{9.2}$$

流れ関数 ψ は、(6.8), (9.1) 式より

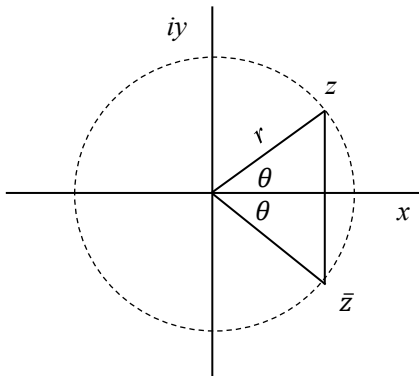
$$\psi = -\frac{Q}{2\pi} \theta = -m\theta\tag{9.3}$$

となる。

$$\begin{aligned}\therefore w &= \phi + i\psi \\ &= -m \log r - im\theta \\ &= -m(\log r + i\theta) \\ &= -m(\log r + \log e^{i\theta}) \\ &= -m \log r \cdot e^{i\theta}\end{aligned}$$

$$\therefore w = -m \log z\tag{9.4}$$

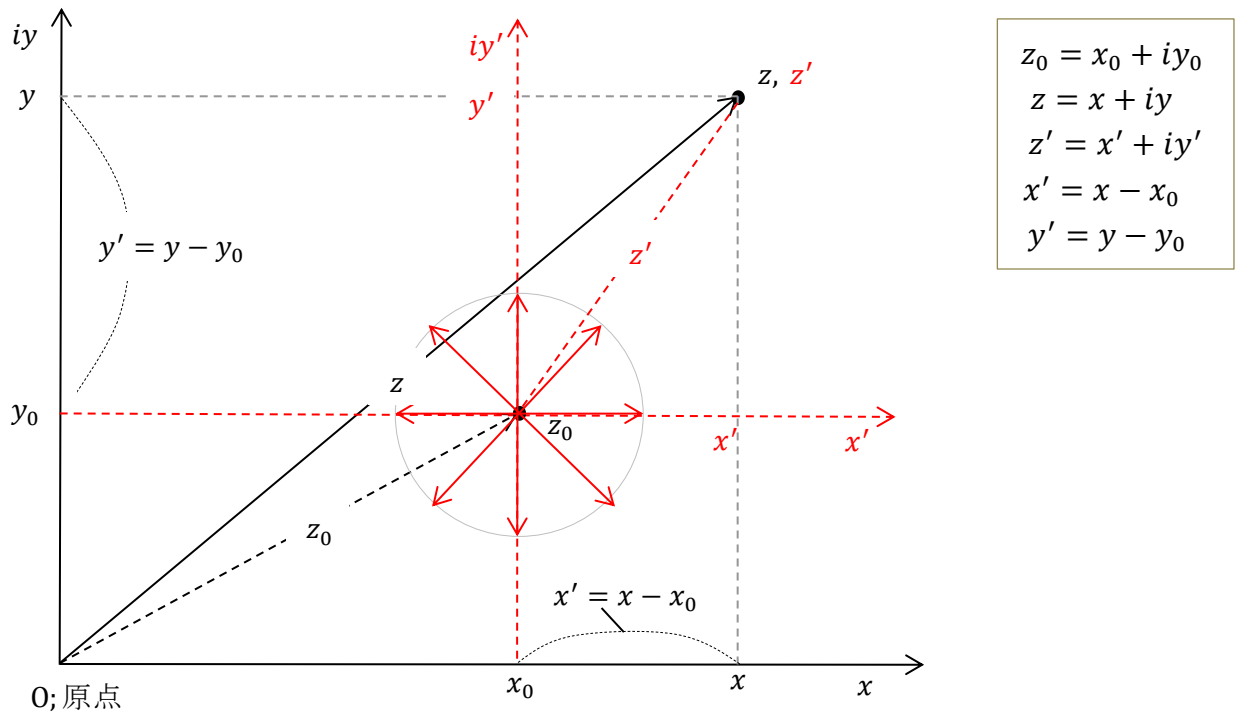
となる。



$$\begin{aligned}z &= x + iy \\ &= r \cos \theta + ir \sin \theta \\ &= r(\cos \theta + i \sin \theta) \\ &= r e^{i\theta}\end{aligned}$$

(複素平面, オイラーの定理より)

(ii) 次に、吹き出し（湧き出し）が原点以外にある場合を考える。



z_0 を原点とした複素平面 $x' - iy'$ を考える。原点 0 に対する $x - iy$ 平面の点 z を z' とする。

$$\begin{aligned}
 w &= -m \log z' \\
 &= -m \log(x' - iy') \\
 &= -m \log\{(x - x_0) - i(y - y_0)\} \\
 &= -m \log\{(x + iy) - (x_0 + iy_0)\}
 \end{aligned}$$

$$\therefore w = -m \log(z - z_0) \quad (9.5)$$

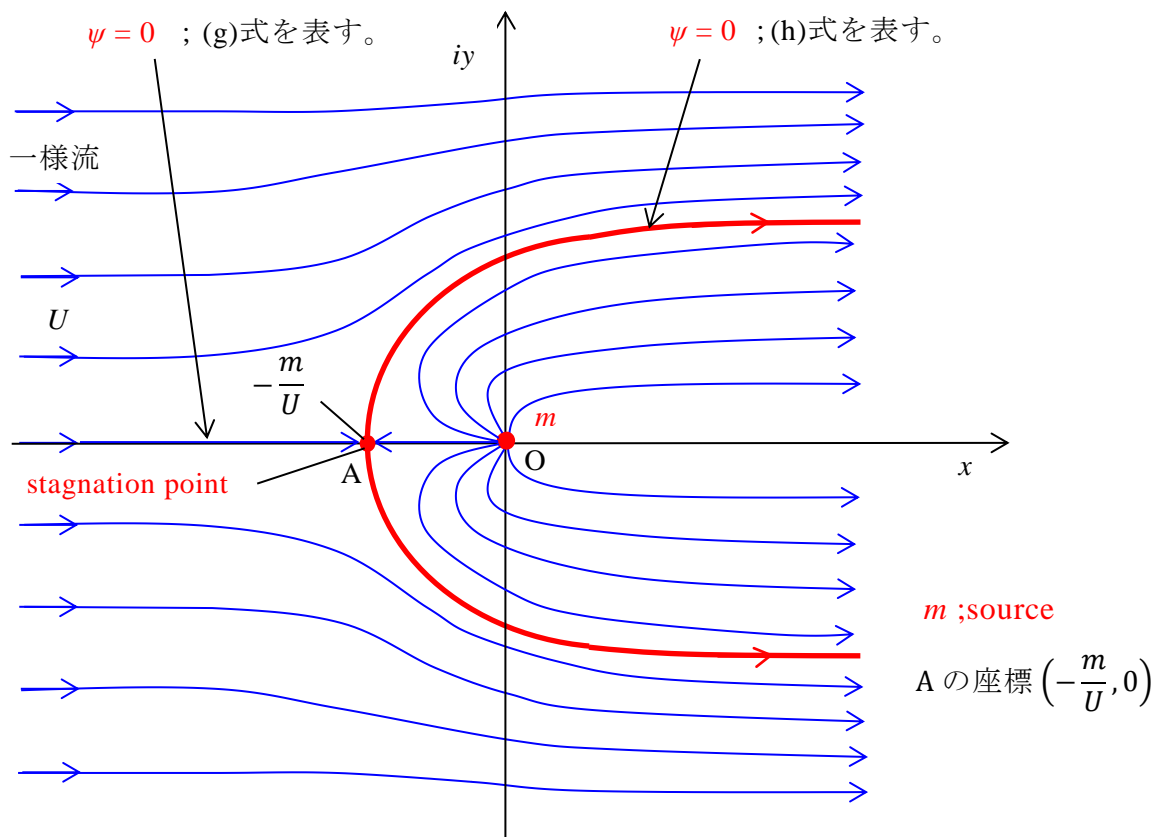
この (9.5) 式が、吹き出しが原点以外の任意の点にある場合の複素ポテンシャルである。

＜組み合わせ流れ (1)＞

＜一様流中にある source がある場合＞

(問題 1) 一様流中にある source がある場合, どのような流れとなるか. 複素ポテンシャル w を求め, 流れを図示せよ.

(解) 一様な流れの方向に x 軸をとり, 原点に強さ m の source があるとする.
今, 分かりやすくするために, 流れを先に図示する.



まず, 一様流の複素ポテンシャル w_1 は, (7.9') 式より

$$w_1 = -Uz \quad (\text{a})$$

吹き出し(source)による複素ポテンシャル w_2 は, (9.4) 式より

$$w_2 = -m \log z \quad (\text{b})$$

故, 全体の流れは, これらを加えたものであり, 全体流の複素ポテンシャルを w とすると

$$\begin{aligned} w &= w_1 + w_2 \\ \therefore w &= -Uz - m \log z \end{aligned} \quad (9.6)$$

となる。

<なぜならば>

上述の加法定理の可能な理由は、 $w = w_1 + w_2$, $\nabla^2 w = 0$ が linear であるから、すなわち、二次元非回転運動では、 ϕ , ψ ともに Laplace の微分方程式を満足する。
速度ポテンシャル ϕ ;

$$\nabla^2 \phi = 0$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$$

流れ関数 ψ ;

$$\nabla^2 \psi = 0$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0$$

であるから

$$\therefore \nabla^2 \phi + i\nabla^2 \psi = 0$$

$$\nabla^2(\phi + i\psi) = 0$$

$$\therefore \nabla^2 w = 0 \quad (\text{イ}) \quad (w = \phi + i\psi \text{ だから})$$

また

$$\nabla^2 w_1 = 0$$

$$\nabla^2 w_2 = 0$$

$$\therefore \nabla^2 w_1 + \nabla^2 w_2 = 0$$

$$\nabla^2(w_1 + w_2) = 0 \quad (\text{ロ})$$

$$\therefore \nabla^2(w) = 0$$

故

$$w = w_1 + w_2$$

となる。

今, stagnation point を A とし, A の座標を求める。

stagnation point では, 複素速度 $dw/dz = 0$ となるから ((7.15) より)

$$\begin{aligned}\frac{dw}{dz} &= 0 \\ \frac{d}{dz}(w_1 + w_2) &= \frac{d}{dz}(-Uz - m \log z) = 0 \\ \therefore -U - \frac{m}{z} &= 0 \\ \therefore z &= -\frac{m}{U}\end{aligned}$$

また

$$\begin{aligned}z &= x + iy \\ \therefore z = x + iy &= -\frac{m}{U}\end{aligned}$$

実数部と虚数部を比較して

$$\begin{aligned}x &= -\frac{m}{U} \\ y &= 0\end{aligned}\tag{c}$$

これが, stagnation point A の座標となる。

$$A(x, y) \rightarrow A\left(-\frac{m}{U}, 0\right)$$

次に, 流線を描くには, (9.6) 式の虚数部を考えるとよい。

$$\begin{aligned}w &= -Uz - m \log z \\ &= -U(x + iy) - m \log(re^{i\theta}) \\ &= -U(x + iy) - m \log(re^{i\theta}) \\ &= -Ux - iUy - m(\log r + \log e^{i\theta}) \\ &= -Ux - iUy - m \log r - mi\theta \\ &= -Ux - m \log r + i(-Uy - m\theta)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore w &= \phi + i\psi \\ z = x + iy &= re^{i\theta} \\ \log e^{i\theta} &= i\theta \log e = i\theta\end{aligned}$$

また, $w = \phi + i\psi$ だから, 実数部と虚数部を比較して

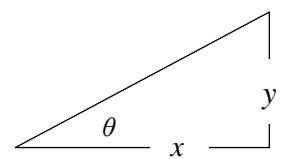
速度ポテンシャル; $\phi = -Ux - m \log r$

流れ関数 ; $\psi = -Uy - m\theta$ (d)

(d) 式は, 一定値に対して一本の流線となる。

今, 流線のみを考えるとよいから, $\psi = 0$ の流線をとると

$$\begin{aligned}\psi &= -Uy - m\theta = 0 \\ Uy + m\theta &= 0 \\ \therefore Uy + m \tan^{-1} \frac{y}{x} &= 0\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\tan \theta &= \frac{y}{x} \\ \theta &= \tan^{-1} \frac{y}{x}\end{aligned}$$

$$m \tan^{-1} \frac{y}{x} = -Uy$$

$$\therefore \frac{y}{x} = -\tan\left(\frac{Uy}{m}\right)$$

$$\therefore y = -x \tan\left(\frac{Uy}{m}\right) \quad (e)$$

級数展開すると

$$\begin{aligned} y &= -x \left(\frac{Uy}{m} + \frac{1}{3} \frac{U^3 y^3}{m^3} + \frac{1}{5} \frac{U^5 y^5}{m^5} + \dots \right) \\ &= -xy \left(\frac{U}{m} + \frac{1}{3} \frac{U^3 y^2}{m^3} + \frac{1}{5} \frac{U^5 y^4}{m^5} + \dots \right) \end{aligned}$$

移行して

$$y + xy \left(\frac{U}{m} + \frac{1}{3} \frac{U^3 y^2}{m^3} + \frac{1}{5} \frac{U^5 y^4}{m^5} + \dots \right) = 0$$

$$y \left(1 + \frac{xU}{m} + \frac{1}{3} \frac{xU^3 y^2}{m^3} + \frac{1}{5} \frac{xU^5 y^4}{m^5} + \dots \right) = 0 \quad (f)$$

故

$$y = 0 \quad (g)$$

$$\text{or} \quad 1 + \frac{xU}{m} + \frac{1}{3} \frac{xU^3 y^2}{m^3} + \frac{1}{5} \frac{xU^5 y^4}{m^5} + \dots = 0 \quad (h)$$

\therefore (g)式 $y = 0$ は, x 軸を表し, $\psi = 0$ の流線は, x 軸上にある。

\therefore (h)式は, $y = 0$ のとき,

$$1 + \frac{xU}{m} = 0$$

となるから

$$\therefore x = -\frac{m}{U} \quad (i) \quad (\text{stagnation point})$$

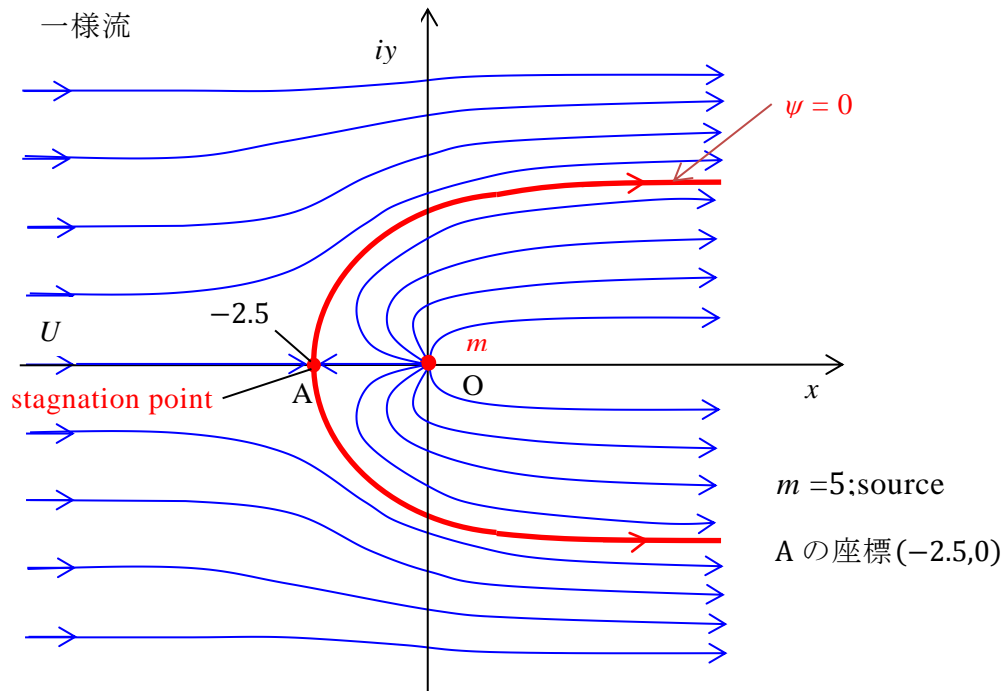
故, (h) 式の曲線は, よどみ点 $A\left(-\frac{m}{U}, 0\right)$ を通る流線となる。

これは, (h)式で示される流線と等しい形の物体を一様流の中に置いた時の流れの状態を示していると考えてよい。

以上のことは, 一様流の中に ある形の物体を置く代わりに適当な source, あるいは sink (複数) をもって置き換え得ることを暗示するものである。

(問題 2) $U=2$ の一様流中に、吹き出し強さ $m=5$ の source がある。 $(U, m; \text{無次元})$
 $\psi=0$ の流線を描け。

(解)



前問より、よどみ点 A の座標は、(i) or (h)式より

$$x = -\frac{m}{U} = -\frac{5}{2} = -2.5$$

となる。

したがって、A 点の座標は、 $(-2.5, 0)$ となる。