ideal fluid2

§４　流体要素の変形

流体が流れているときの流体要素が，どのように変形するかについて考える。
今，簡単のために，定常流とする。
・流体内の任意の点$\mathrm{P}(x,y,z)$の速度成分を，u,v,wとする。

・点 P に非常に近接した点$\mathrm{P}'(x+dx,y+dy,z+dz)$の速度成分を

$$u+du,v+dv,w+dw$$

とすると

$$u+du=u(x+dx,y+dy,z+dz)\,,or=f_1(x+dx,y+dy,+z+dz)$$
$$v+dv=v(x+dx,y+dy,z+dz)\,,or=f_2(x+dx,y+dy,+z+dz)$$
$$w+dw=w(x+dx,y+dy,z+dz)\,,or=f_3(x+dx,y+dy,+z+dz)$$

となる。

これを Taylor 展開して，dx,dy,dz の二次項の微小量を無視すると

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz$$
$$dv=\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy+\frac{\partial v}{\partial z}dz$$
$$dw=\frac{\partial w}{\partial x}dx+\frac{\partial w}{\partial y}dy+\frac{\partial w}{\partial z}dz \tag{4.1}$$

となる。

これは, 点 P と点 P’の相対速度であり, この相対速度によって流体要素は変形する。

（4.1）式中の

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z},\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial z},\frac{\partial w}{\partial x},\frac{\partial w}{\partial y},\frac{\partial w}{\partial z}}$$

の９個の物理的意味を，次の３つの場合について調べてみよう。

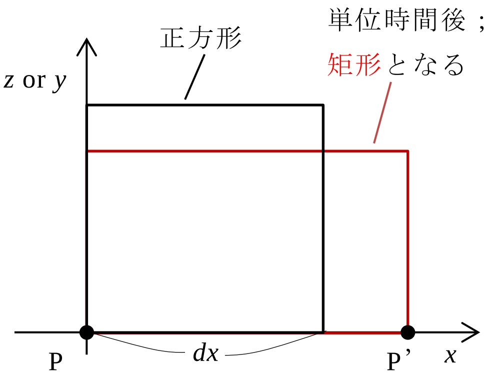
(ｉ) $\frac{\partial u}{\partial x}$ 以外の　すべてが0の場合　(伸び変形)

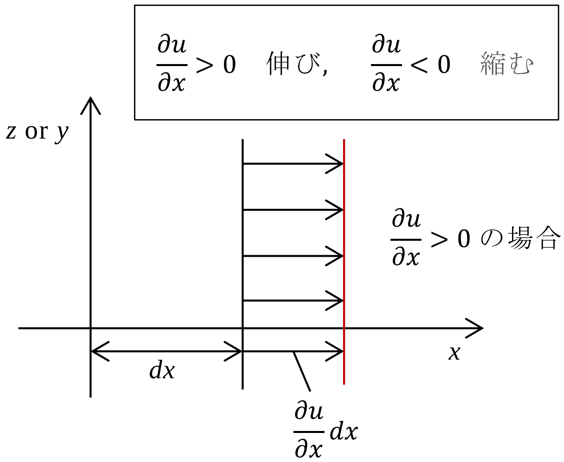
（4.1）式は

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx, \qquad dv = 0, \qquad dw = 0 \tag{4.2}$$

となる。

P：原点にとると





$\frac{\partial u}{\partial x}$：**伸長速度** velocity of extension　という。

yzに平行な面がx方向に伸びる速度。($dx = 1$ を単位長さにとる)

同様にして

$\frac{\partial v}{\partial y}$：$zx$面の$y$方向への**伸長速度**

$\frac{\partial w}{\partial z}$：$xy$面の$z$方向への**伸長速度**

（ⅱ）$\frac{\partial u}{\partial y}$以外の　すべてが0の場合　（せん断変形）

（1.11）式は

$$du = \frac{\partial u}{\partial y}dy, \qquad dv = 0, \qquad dw = 0 \tag{4.3}$$

また

$\frac{\partial v}{\partial x}$以外の　すべてが0の場合

$$du = 0, \qquad dv = \frac{\partial v}{\partial x}dx, \qquad dw = 0 \tag{4.3'}$$

となる。

$\frac{\partial u}{\partial y}$は；$x$に平行な面の$x$方向への　すべり速度 shearing stress　を表す。

$\frac{\partial v}{\partial x}$は；$yz$に平行な面の$y$方向への　すべり速度　を表す。

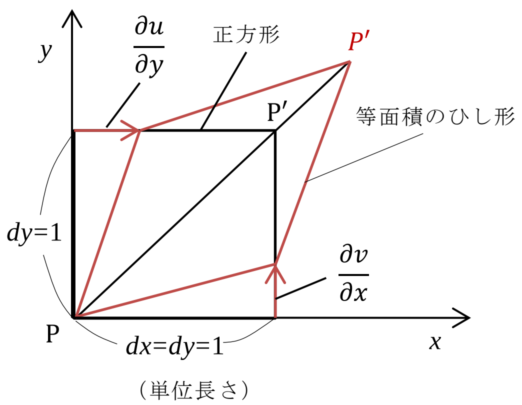


図　せん断変形

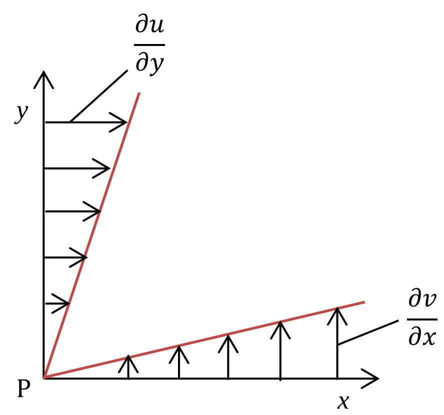


図　すべり速度

故；

$\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}$は，$xy$面内の正方形が等面積のひし形に歪む割合を示す。せん断変形

同様に

$\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}$は，$yz$面内の正方形が等面積のひし形に歪む割合を示す。せん断変形

$\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}$は，$zx$面内の正方形が等面積のひし形に歪む割合を示す。せん断変形

(iii) $\dfrac{\partial v}{\partial x}-\dfrac{\partial u}{\partial y}$は，　(回転変形)

図に示すように，*xy* 面内の正方形が P 点のまわりに回転する割合を示す。

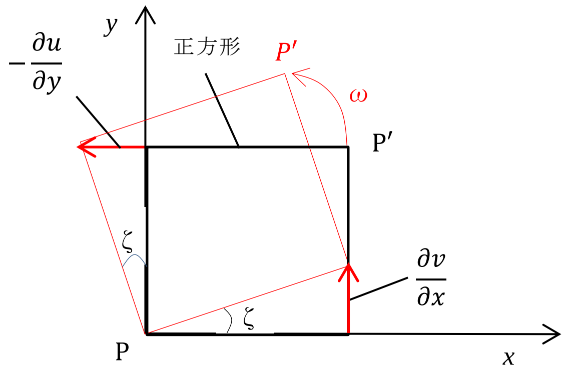


図　回転変形

今

二次元 *xy* 面内の回転
角速度　;　ω
z 軸まわりを回転する場合を考える。

P’(*x*,*y*)の速度成分 *u*,*v* は

$$u=-\omega y$$
$$v=\omega x$$

だから

$$\frac{u}{y}=-\omega \ , \qquad \frac{v}{x}=\omega$$

$$\therefore \frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=\omega-(-\omega)=2\omega \tag{4.4}$$

$$\therefore \omega=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right) \tag{4.5}$$

故，（4.5）式は，流体要素の *z* 軸まわりの**角速度**を表す。

次に，同様にして三次元の場合，*x, y, z* 軸まわりの角速度は

$$\xi = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)$$
$$\eta = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)$$
$$\zeta = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) \qquad (4.6)$$

となる。

ξ，η，ζ；回転角速度の成分（or Spin の成分）

2ξ，2η，2ζ ；**渦度**(vorticity)

$$2\xi = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}$$
$$2\eta = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}$$
$$2\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

● $\xi = 0$，$\eta = 0$，$\zeta = 0$　の場合の流れ；　(4.6’)

非回転運動（or　渦なし流れ）Irotational motion

● ξ，η，ζ　のすべて，または　いずれかの一つが 0 でない場合の流れ；(4.6’’)

回転運動　Rotational motion

or

渦運動　Vortex motion

（渦流れ）

という。

§ 5　速度ポテンシャル　velocity potential

$$u = -\frac{\partial\phi}{\partial x}, \qquad v = -\frac{\partial\phi}{\partial y}, \qquad w = -\frac{\partial\phi}{\partial z} \tag{5.1}$$

（5.1）式を満足する ϕ が存在しるとき，この **ϕ を速度ポテンシャル** velocity potential と呼ぶ。

流速 **V**(u,v,w) vector 量
→scolor 量
重力；vector 量
ϕ ；scolor 量
ポテンシャル；scolor 量

（5.1）式の速度ポテンシャル ϕ の存在する条件；

ϕ が存在するときは，（4.6）式より

$$2\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial\phi}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)$$

$$= -\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial x}$$

$$= 0 \qquad\qquad (\phi\text{ が連続})$$

同様にして

$$2\xi = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = 0$$

$$2\eta = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = 0$$

故

$$\zeta = 0$$
$$\xi = 0$$
$$\eta = 0 \tag{5.2}$$

すなわち，ϕ が存在するときは
spin 成分（ξ，η，ζ），or **渦度 vorticity**（2ξ，2η，2ζ）は，ゼロである。
逆の場合も同様に証明できる。

ϕ が存在するための必要，かつ十分条件は，流れが**渦なし流れ（非回転運動）**となることであるので，通常，**渦なし流れを**ポテンシャル流れ potential flow と呼ぶ。

＜等ポテンシャル面＞

ϕ の一定な面を，等ポテンシャル面 equi-potential surface をいう。

$$\phi = \mathrm{const}$$

$$\therefore d\phi = 0 \qquad (5.3)$$

今，関数 $\phi(x, y, z)$ の全微分を考えると

$$d\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\phi}{\partial y}dy + \frac{\partial\phi}{\partial z}dz \qquad (5.4)$$

となるから，流れが三次元の場合，等ポテンシャル面上では，$d\phi = 0$

したがって

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\phi}{\partial y}dy + \frac{\partial\phi}{\partial z}dz = 0 \qquad (5.5)$$

が成立する。

（5.1）を代入すると

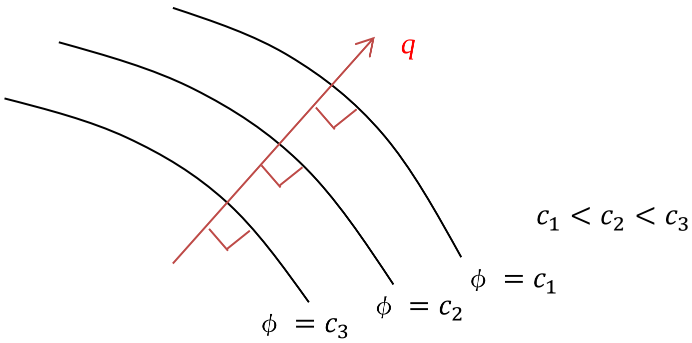
$$\therefore \ udx + vdy + wdz = 0 \qquad (5.6)$$

となる。

流線の方程式は，（5.6）で示したように

$$\frac{u}{dx} = \frac{v}{dy} = \frac{w}{dz}$$

であるから，流線は（5.6）式，すなわち $\phi = \mathrm{const}$ の等ポテンシャル面と直交する。

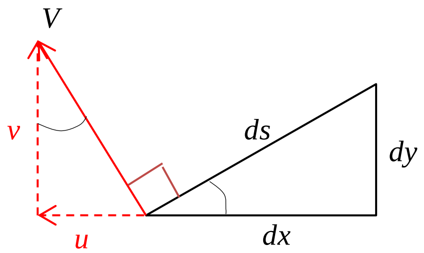


or （5.6）式は，速度 V と線要素 *ds* が直交している。下図参照。

例えば，二次元流れでは，

$$udx + vdy = 0$$

$$-\frac{u}{v} = \frac{dy}{dx}$$



＜等ポテンシャル線＞

ϕ の一定な線

$$\phi = \mathrm{const}$$

$$\therefore d\phi = 0 \tag{5.7}$$

（例）二次元流れ

$$d\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\phi}{\partial y}dy = 0 \tag{5.8}$$

or

$$\therefore \quad udx + vdy = 0 \tag{5.9}$$

＜連続の式の別の表示方法＞

＜二次元流れの場合の連続の式＞

連続の式については，§2（2.1～2.3 式）で述べたが，ここでは速度ポテンシャル ϕ を用いて，連続の式を書き換える。

完全流体の連続の式は，定常非圧縮性の場合，（2.3）式に示したように

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0$$

であるから，これに（5.1）式を代入すると

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)=0$$

$$\therefore \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}=0$$

or

$$\nabla^2 \phi = 0 \tag{5.10}$$

（ラプラスの方程式）

となる。これが三次元流れにおける連続の式である。

ただし，

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Laplacian　と呼ぶ。or ナブラスクエア　と呼ぶ。

＜二次元流れの場合の連続の式＞

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}=0$$

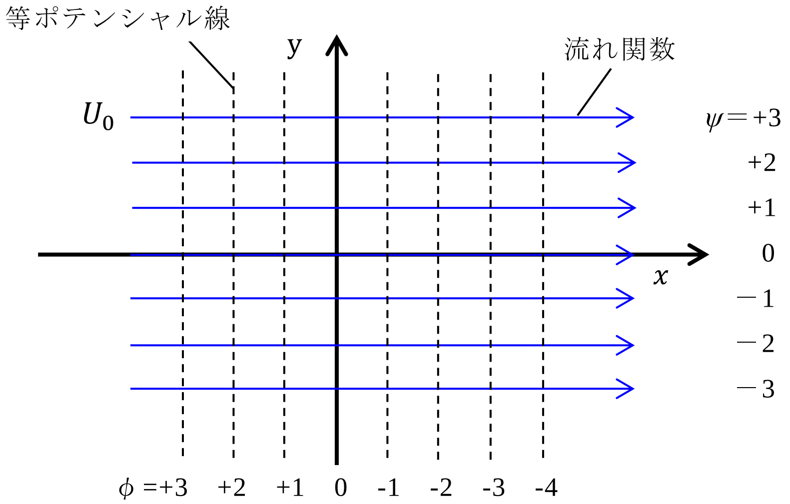
or

$$\nabla^2 \phi = 0 \tag{5.11}$$

（ラプラスの方程式）

＜速度ポテンシャルに関する例題＞

（例題１）一様な流れ uniform flow　が速度ポテンシャル ϕ でどのように表されるか。流れの方向を x 軸にとる。



（解）（5.1）式より

$$u = -\frac{\partial\phi}{\partial x}, \qquad v = -\frac{\partial\phi}{\partial y}$$

今，流速をU_0とすると，一様流れであるから

$$u = U_0, \qquad v = 0$$

$$\therefore\ U_0 = -\frac{\partial\phi}{\partial x}, \quad 0 = -\frac{\partial\phi}{\partial y}$$

積分すると

$$d\phi = -U_0 dx$$

$$\therefore\ \phi = \int d\phi = -U_0 \int dx = -U_0 x + C \qquad (C\text{:積分定数}) \qquad (\mathrm{i})$$

今，x＝0 で，ϕ＝0 とすると，C＝0 だから

$$\therefore\quad \phi = -U_0 x \qquad (\mathrm{ii})$$

と表される。

今，$U_0 = 1$ とすると

x=＋1　のとき　ϕ＝－1
x=＋2　のとき　ϕ＝－2
x=－1　のとき　ϕ＝＋1
x=－2　のとき　ϕ＝＋2
・・・・・・・・・

（例題２） $\phi = U_0 x + C$　の流れを描け。ただし，一様流とする。

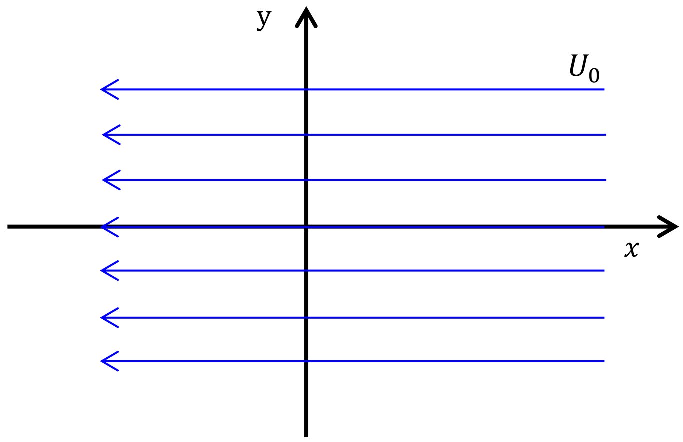
（解）

$$
\begin{aligned}
u &= -\frac{\partial \phi}{\partial x} \\
&= -\frac{\partial}{\partial x}(U_0 x + C) \\
&= -U_0
\end{aligned}
$$

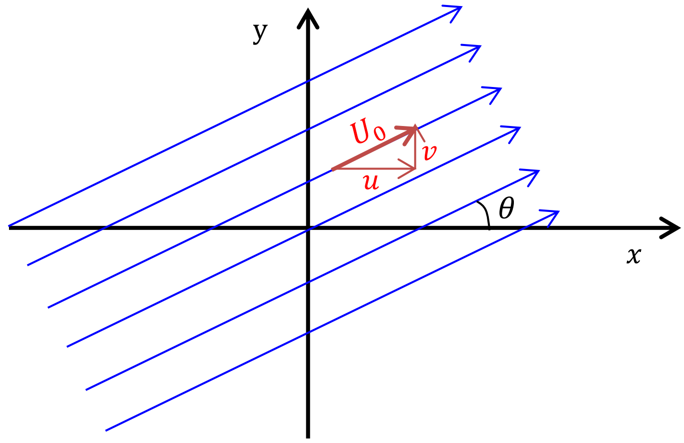
また

$$
\begin{aligned}
v &= -\frac{\partial \phi}{\partial y} \\
&= \frac{\partial}{\partial y}(U_0 x + C) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

したがって



（例題３） x 軸と θ の角度をなす速度U_0の一様流を，速度ポテンシャル ϕ で表せ。



（解）

$$u = U_0 \cos\theta \ , \quad v = U_0 \sin\theta$$

$$-\frac{\partial \phi}{\partial x} = u = U_0 \cos\theta \qquad \text{(i)}$$

$$-\frac{\partial \phi}{\partial y} = v = U_0 \sin\theta \qquad \text{(ii)}$$

（ｉ）より

$$d\phi = -U_0 \cos\theta\, dx$$

積分すると

$$\phi = \int d\phi = -U_0 \cos\theta\, x + C_1 \qquad \text{(iii)}$$

（iii）を（ⅱ）に代入

$$-\frac{\partial}{\partial y}(-U_0 \cos\theta\, x + C_1) = U_0 \sin\theta$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(C_1) = -U_0 \sin\theta$$

積分

$$C_1 = -U_0 \sin\theta\, y + C \qquad \text{(iv)}$$

（iii）に代入して

$$\phi = -U_0 \cos\theta\, x - U_0 \sin\theta\, \mathrm{y} + C$$

となる。

今，原点（x=0,y=0）を通る等ポテンシャル線を 0 とすると，C=0 だから，速度ポテンシャル ϕ は

$$\therefore \ \phi = -U_0(x\cos\theta + y\sin\theta)$$

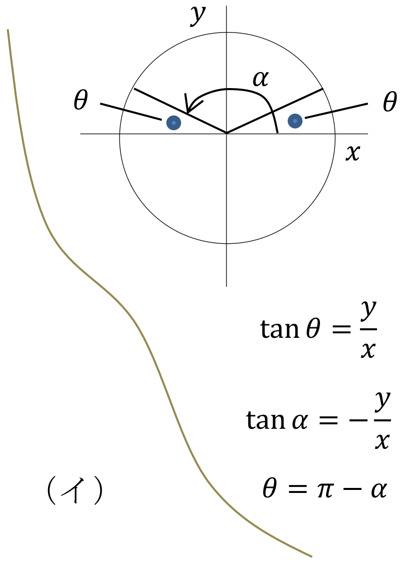
となる。

（例題４）速度ポテンシャル

$$\phi = \frac{1}{2}(x^2 - y^2)$$

で与えられる流れを図示せよ。

（解）（5.1）式より



$$\left.\begin{aligned} u &= -\frac{\partial\,\phi}{\partial x} = -\frac{\partial\left\{\frac{1}{2}(x^2-y^2)\right\}}{\partial x} = -x \\ v &= -\frac{\partial\,\phi}{\partial y} = -\frac{\partial\left\{\frac{1}{2}(x^2-y^2)\right\}}{\partial x} = +y \end{aligned}\right\}$$

簡単のために，第１象限のみを考える。($x \geq 0, y \geq 0$)

Vector 速度 $V(u,v)$は

$$\tan\alpha = \frac{v}{u} = -\frac{y}{x} \qquad\qquad \frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi$$

今，$y \to 0,\ x \to \infty$ のとき ⇒　$\tan\alpha = -\frac{y}{x} = -\frac{0}{\infty} = 0$　　　$\therefore\ \alpha = \pi$

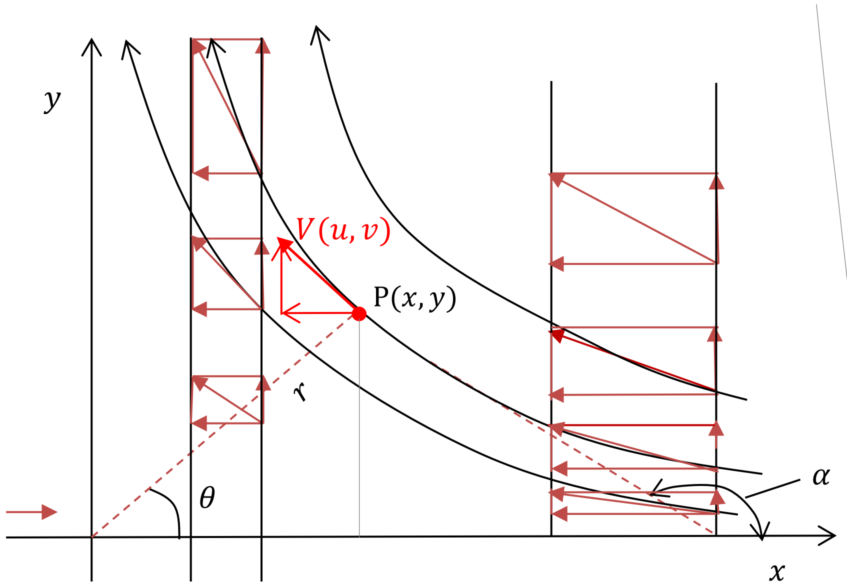
$y \to \infty,\ x \to 0$ のとき ⇒　$\tan\alpha = -\frac{y}{x} = -\frac{\infty}{0} = -\infty$　　　$\therefore\ \alpha = \frac{\pi}{2}$

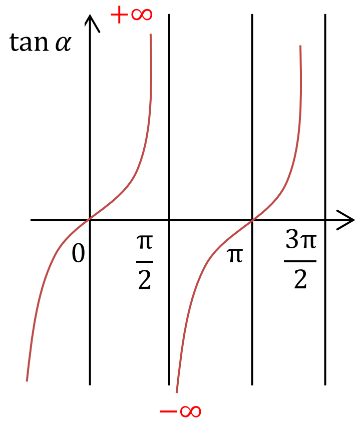
また，速度 V は

$$|V| = \sqrt{u^2 + v^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{r^2} = r$$

$$\tan\theta = y/x, \quad \tan\alpha = -y/x \qquad \therefore\ \alpha = \pi - \theta, \quad \theta = \pi - \alpha$$

したがって，$|V|$ は，原点からの距離に比例する。





$$\boxed{\begin{aligned} \tan(\pi - \alpha) &= \tan(-\alpha) \\ &= -\tan\alpha \end{aligned}}$$

次に，流線は（1.1）式より

$$\frac{u}{dx}=\frac{v}{dy}$$

だから

$$\therefore \quad \frac{dx}{u}=\frac{dy}{v}$$

（イ）より

$$u=-x, \qquad v=y$$

だから

$$\therefore \quad \frac{dx}{-x}=\frac{dy}{y}$$

$$\frac{dx}{x}+\frac{dy}{y}=0$$

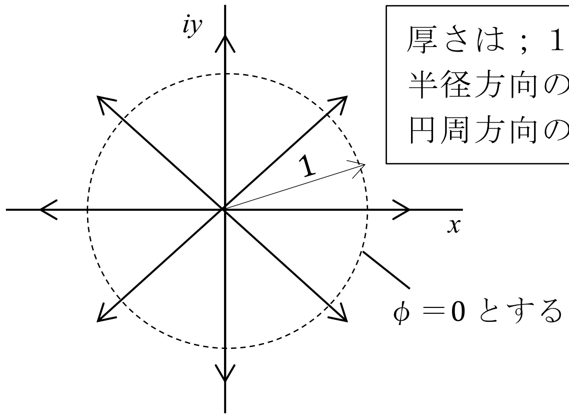
$$\therefore \quad \log x+\log y=\log C \qquad C:\text{積分定数}$$

$$\boxed{\therefore \quad xy=C}$$

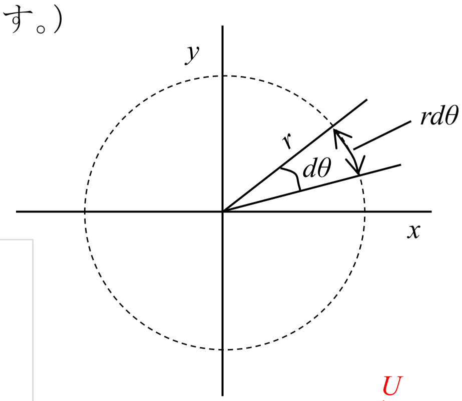
この式は，直角双曲線を示すので，流線は　**直角双曲線**　となる。

流線については，次節で述べる。

（例題５）原点より単位時間に，流量 Q が四方へ吹き出す流れの速度ポテンシャル ϕ を求めよ。（次節で流れ関数 ψ の例題を示す。）



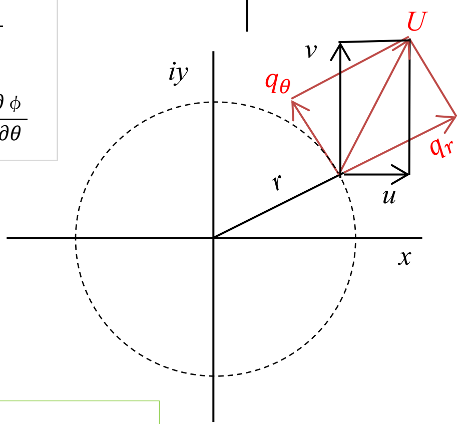
厚さは；１とする。
半径方向の流速；q_r
円周方向の流速；q_θ



$$u=-\frac{\partial\phi}{\partial x}$$

$$v=-\frac{\partial\phi}{\partial y}$$

$$q_\theta=-\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}$$



（解）円筒座標でで考えると

$$q_r=-\frac{\partial\phi}{\partial r},\quad q_\theta=-\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\qquad（イ）$$

また，流量 Q は

$$Q=2\pi r\cdot q_r\qquad（2\pi r;\text{円周長さ}）（ロ）$$

$$\therefore\quad q_r=\frac{Q}{2\pi r}$$

また，題意より

$$q_\theta=0\qquad（ハ）$$

（ハ）を（イ）に代入

$$\frac{\partial\phi}{\partial r}=-\frac{Q}{2\pi r}\ ,\qquad \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}=0$$

積分すると

$$\phi=-\frac{Q}{2\pi}\int\frac{1}{r}dr$$

$$\therefore\quad\phi=-\frac{Q}{2\pi}\log r+C\qquad C:\text{積分定数}$$

今，半径 r =1 の単位円の等ポテンシャル線を ϕ =0 とすると

$$\log r=\log 1=0$$

だから

$$\therefore C=0$$

故

$$\phi=-\frac{Q}{2\pi}\log r\qquad(5.12)$$

湧き出し　source　　　（§8 で詳述）

上式が求める速度ポテンシャル ϕ である。

§ 6　流れ関数　stream function

二次元ポテンシャル流れにおいて，$\psi(x,y)$　があり

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{6.1}$$

の関係がある場合，この **ψ を流れ関数**という。

ψ が分かると，速度成分 u, v が求められる。

また，二次元流れのときは，流線の方程式は，(2.1)より

$$\frac{u}{dx} = \frac{v}{dy}$$

で表された。

$$\therefore udy - vdx = 0$$

このu, v を ψ で書き換えると

$$-\frac{\partial \psi}{\partial y}dy - \frac{\partial \psi}{\partial x}dx = 0$$

$$\therefore \quad \frac{\partial \psi}{\partial x}dx + \frac{\partial \psi}{\partial y}dy = 0$$

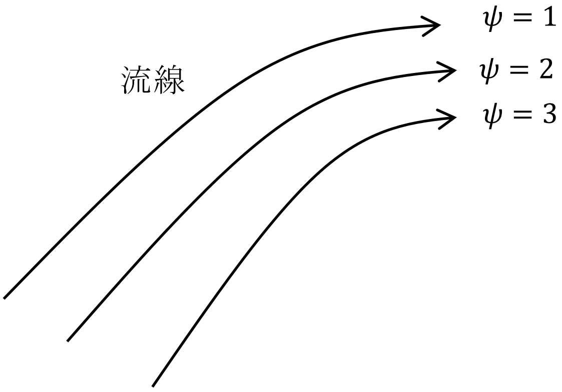
これは，関数 $\psi(x, y)$の全微分であるから

$$\therefore d\psi = 0$$

$$\psi(x,y) = \text{const} \tag{6.2}$$

すなわち，１本の流線にそって，ψ は一定である。

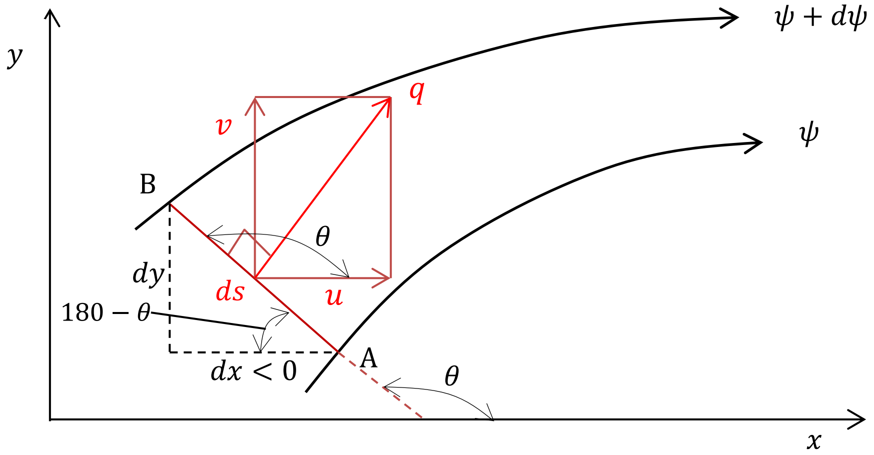
（例）



全微分；

$$dF(x,y) = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy$$

次に，**＜流れ関数 ψ の重要な性質の一つについて調べる。＞**



・隣接する流線 ； ψ，$\psi + d\psi$
・流線上の任意の点；A, B
・深さ（厚さ）を，１とする。⇒　単位深さ

・$\overline{\mathrm{AB}}$ ＝ 線素 ds とする。

・ds の中央部の $\overline{\mathrm{AB}}$ に垂直な速度成分；q とする。
・速度 q の x, y 成分　；　u, v
とする。
今，線素 ds を単位時間に左から右へ通過する流量 dQ は（単位深さ当たり）

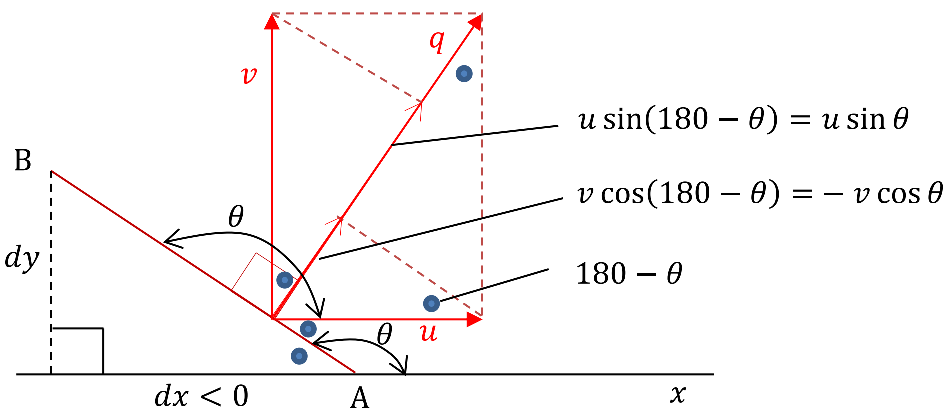
$$dq = q \times ds \qquad (イ)$$

また，流速 q は

$$q = u\sin\theta - v\cos\theta \qquad (ロ)$$

となる。

$$\sin\theta = \frac{dy}{ds},\quad \cos\theta = \frac{dx}{ds} \qquad (ハ)$$



（ロ），（ハ）を（イ）に代入

$$
\begin{aligned}
dQ &= \mathrm{q} \times \mathrm{ds} \\
&= (u \sin\theta - v \cos\theta) ds \\
&= \left(u \frac{dy}{ds} - v \frac{dx}{ds}\right) ds \\
&= \left(-\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{dy}{ds} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{dx}{ds}\right) ds && \text{(6.1)を代入} \\
&= -\left(\frac{\partial\psi}{\partial y} dy + \frac{\partial\psi}{\partial x} dx\right) \\
&= -d\psi(x, y) && \text{全微分だから}
\end{aligned}
$$

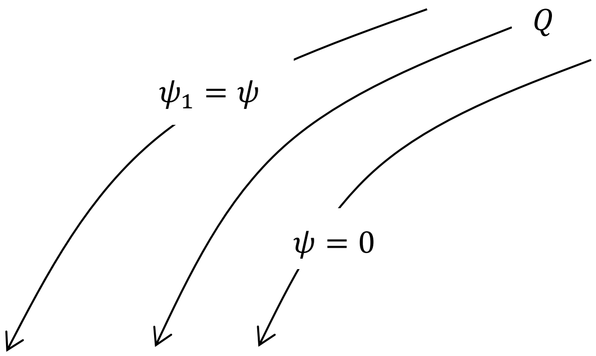
$$\therefore \ dQ = -d\psi \tag{6.3}$$

$$
\begin{aligned}
\therefore \ Q &= -\int_A^B d\psi \\
&= -(\psi_B - \psi_A) \\
&= \psi_A - \psi_B
\end{aligned}
\tag{6.4}
$$

したがって，二つの流線の間を流れる流量（単位深さ）は，

その二つの流れ関数の差に等しい。

（例）



（6.3）式より

$$Q = \int_0^{\psi_1} dQ = -\int_0^{\psi_1} d\psi = -\psi_1$$

上式の流れ関数は，渦なしの条件は入っていない。

したがって，速度ポテンシャル ϕ は，渦なし流れのみ使用されるのに対して，流れ関数 ψ は渦のある流れ，粘性流体の流れ等に広範囲に使用される。

＜非回転運動（渦なし流れ）における ϕ と ψ との関係＞
二次元流れの場合

・完全流体の場合，速度ポテンシャル ϕ の Laplace の微分方程式は（5.11）式より

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}=0$$

or

$$\nabla^2 \phi = 0 \qquad \text{（イ）}$$

・また，一方流れ関数 ψ の微分方程式は，渦なしであるから

渦度　$\zeta = 0$

であるから，（4.6）式より

$$u=-\frac{\partial\psi}{\partial y},\quad v=\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

$$\zeta=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0$$

$$\therefore \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)=0$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=0$$

or

$$\nabla^2\psi=0 \qquad \text{（ロ）}$$

したがって，（イ），（ロ）より分かるように，二次元の非回転流れにおいては，ϕ と ψ ともに Laplace の微分方程式を満足する。

なお，（5.1），（6.1）式より

$$u=-\frac{\partial \phi}{\partial x}=-\frac{\partial\psi}{\partial y}$$

$$v=-\frac{\partial \phi}{\partial y}=\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

だから

ϕ と ψ との間には

$$\therefore \quad \frac{\partial \phi}{\partial x}=\frac{\partial\psi}{\partial y}=-u$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y}=-\frac{\partial\psi}{\partial x}=-v \qquad (6.5)$$

の関係がある。

したがって，（6.5）式より

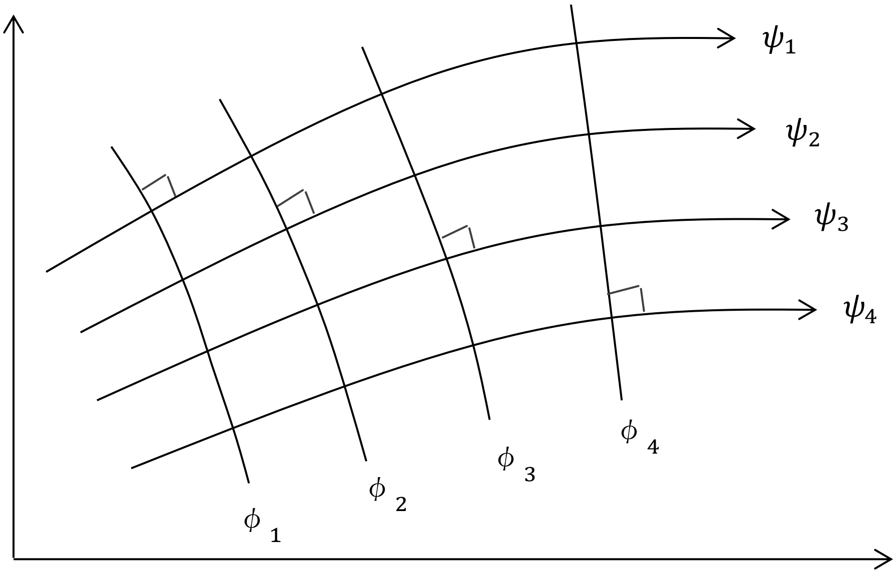
$$\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial y}=0$$

or

$$\frac{\dfrac{\partial\phi}{\partial x}}{\dfrac{\partial\phi}{\partial y}}=-\frac{1}{\dfrac{\dfrac{\partial\psi}{\partial x}}{\dfrac{\partial\psi}{\partial y}}} \qquad (6.6)$$

この（6.5），（6.6）式は，ϕ = const の等ポテンシャル線とψ = const の流線とが互いに直交していることを意味する。

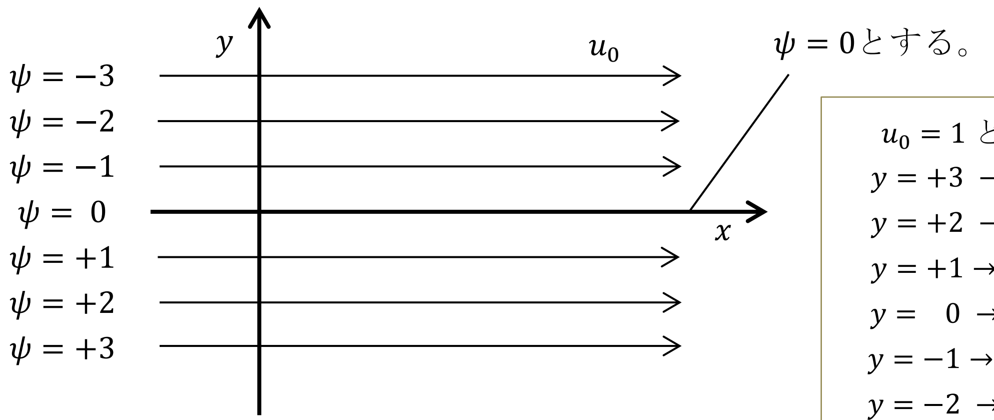
特に，（6.5）式を**コーシー・リーマンの関係式　Cauchy-Riemann の微分方程式**という。



＜流れ関数に関する例題＞

（例題１） 一様な流れの速度をu_0とする。この場合の流れ関数 ψ を求めよ。ただし，流れの方向を x 軸にとる。

（解）



$u_0 = 1$ とすると
$y = +3 \rightarrow \psi = -3$
$y = +2 \rightarrow \psi = -2$
$y = +1 \rightarrow \psi = -1$
$y = 0 \rightarrow \psi = 0$
$y = -1 \rightarrow \psi = +1$
$y = -2 \rightarrow \psi = +2$
$y = -3 \rightarrow \psi = +3$

x 軸と一致する流線を$\psi = 0$とする。

$$u = -\frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial\psi}{\partial x}$$

題意より，一様流だから

$$u = u_0, \quad v = 0$$

（6.1）式より

$$u = u_0 = -\frac{\partial\psi}{\partial y} \qquad \text{（イ）}$$

$$v = \frac{\partial\psi}{\partial x} \qquad \text{（ロ）}$$

（イ）を y について積分すると

$$\partial\psi = -u_0 \partial y$$

$$\therefore \quad \psi = \int d\psi$$

$$= -\int u_0 dy$$

$$= -u_0 y + C \qquad \text{（C: 積分定数）}$$

今，$y = 0$ で $\psi = 0$ だから

$$C = 0$$

$$\therefore \quad \psi = -u_0 y \qquad \text{（6.7）}$$

したがって，この式より流線は，x 軸に平行な流れとなる。

（例題２） $\psi = xy$　の流れを求めよ。

（解）（6.1）式より

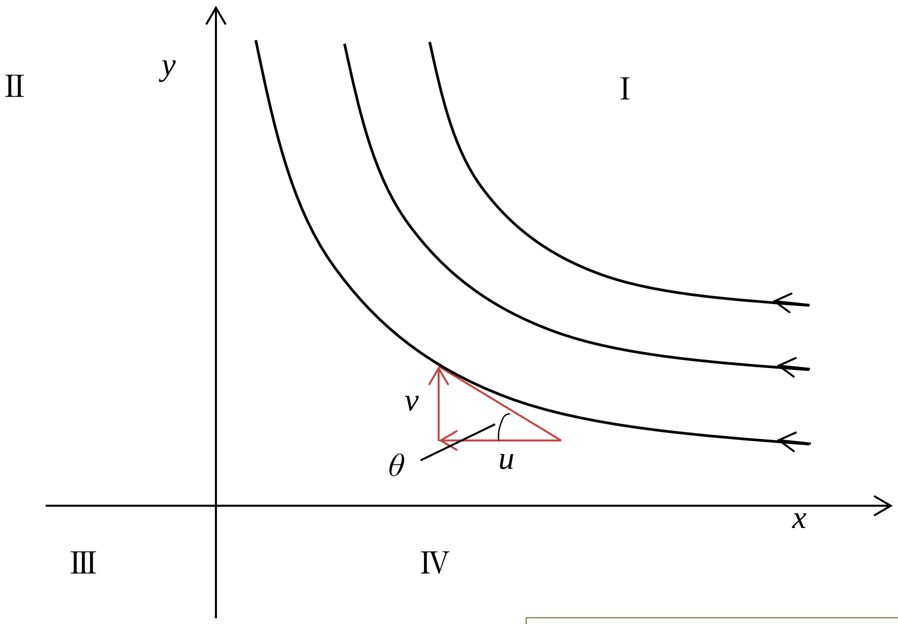
$$u = -\frac{\partial\psi}{\partial y} = -\frac{\partial(xy)}{\partial y} = -x$$

$$v = \frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\partial(xy)}{\partial y} = y$$

流れの方向が x 軸となす角度を θ とすると

$$\tan\theta = \frac{v}{u} = -\frac{y}{x}$$

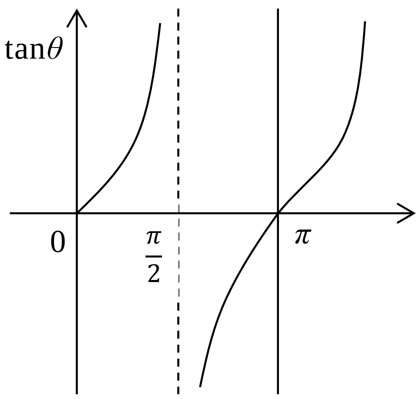
したがって，流線は**直角双曲線**となる。（第 1 象限）



第 I 象限では

$x \rightarrow 0$, $y \rightarrow 0$; $\tan\theta = -\infty$

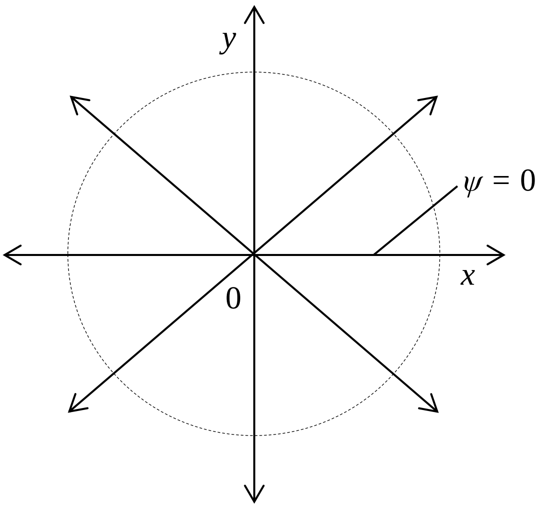
∴ $\theta = \pi/2 + \varepsilon$



（例題３） 原点より流量 Q が四方へ吹き出す流れの流れ関数 ψ を求めよ。

（湧き出し Source　§8 で詳述　吹き出し）

（解）



厚さは 1 とする。　半径方向の流速；q_r　　円周方向の流速；q_θ

極座標を考える。

$$q_r = -\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}$$

$$q_\theta = \frac{\partial\psi}{\partial r} \qquad \text{（イ）}$$

流量$Q = 2\pi r \cdot q_r$　だから

$$\therefore \quad q_r = \frac{Q}{2\pi r}$$

また

$$q_\theta = 0 \qquad \text{（ロ）}$$

（イ），（ロ）より

$$-\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} = \frac{Q}{2\pi r}$$

$$\therefore \quad \frac{\partial\psi}{\partial\theta} = -\frac{Q}{2\pi}, \quad \text{また} \quad \frac{\partial\psi}{\partial r} = 0 \qquad \text{（ハ）}$$

（ハ）を θ で積分すると

$$\psi = -\frac{Q}{2\pi}\cdot\theta + C \qquad (C;\text{積分定数}) \qquad \text{（ニ）}$$

今，x 軸を ψ=0 とする（θ =0）と，$C = 0$　となる。

故

$$\psi = -\frac{Q}{2\pi}\theta \qquad (6.8)$$

したがって，流線は原点 0 より四方へ伸びる直線となる。