# 完全流体の力学（丁寧　詳述編）

# (理想流体の力学)

## 目　　　次

**ideal fluid1**

# ideal fluid2

## ideal fluid3



## ideal fluid4

# ＜まえがき＞

完全流体（perfect fluid)は，粘性のない仮想の流体のことで，理想流体（ideal fluid）ともいう。実在流体，つまり粘性流体（viscosity fluid）は，粘性のために物体まわりには境界層が生成され非常に複雑な流れとなり，流れの解明，解析には困難を伴う。

完全流体，非粘性流体（inviscid fluid）は，粘性を無視した流体のことであり，粘性を持つ粘性流体，実在流体を単純化したモデルとして用いられる。

つまり，完全流体と仮定することで理論解析が数学的に容易となり，いろいろな分野で役立っており，恩恵を受けている。

例：球まわり・円柱まわりの流れの解明，翼まわりの流れの解明など。

キーワード : Euler の運動方程式, Lagrange の運動方程式, 渦度, 速度ポテンシャル, 流れ関数，複素ポテンシャル，複素平面，二重吹き出し，角を曲がる流れ，湧き出しと吸い込み，平面壁と湧き出し＆鏡像，平面壁と二重吹き出し Doublet，循環，円を過ぎる循環を伴う流れ，ダランベールのパラドックス(d’Alembert paradox)，クッタジュコフスキーの定理 Kutta-Joukowski theorem，Joukowski 変換，Joukowski 翼形＆揚力，写像関数，自由渦，stagnation point

＜流体力学　著名者＞

◎Newton　;イギリス（1642～1727）　抵抗則　慣性抵抗は速度の二乗に比例する。
◎ダニエル Bernoulli　;　スイス　物理学者（1700～1783）　ベルヌーイの定理　息子
◎d’Alembert ;フランス（1717～1783）静止流体内の圧力は，すべての方向に等しい。
d’Alembert の逆説　完全流体では，揚力，抗力は発生しない。
◎Euler : ドイツ（1707～1783）天才的な数学才能，Euler の運動方程式　統計的手法
◎Lagrange ;フランス（1736～1813）Lagrange の運動方程式　歴史的手法

完全流体 perfect fluid；非圧縮 incompressible fluid，非粘性の流体 inviscid fluid
完全気体；perfect gas

粘性流体 viscous fluid
圧縮性流体 compressible fluid

狭義の意味で　非粘性流体を⇒理想流体 ideal fluid　とも呼ぶ。

# § 1　流れの模様　flow pattern

## 流線　流跡　流脈

次の三つの表示方法がある。

（１）**流線**　**stream line**

「ある瞬間に，流れ場に一本の曲線を引いて，その線上の任意の点で接戦を引いたとき，その接線がその点の速度の方向と一致するとき，この曲線を**流線**と呼ぶ。」

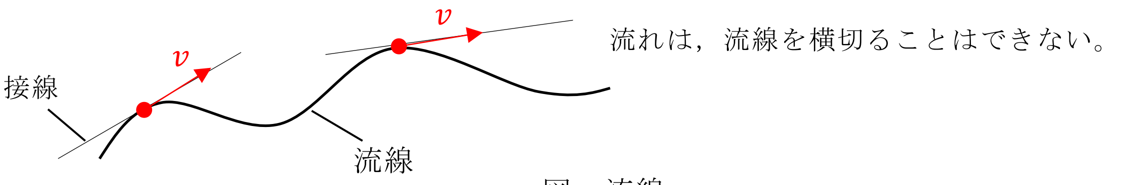



図　流線

＜**流管**＞stream tube

「定常流では，流線と流体は経路線と一致する。流体内に一つの小さな閉曲線を考え，それを通る無数の流線は，一つの管を形成する。これを**流管**という。」

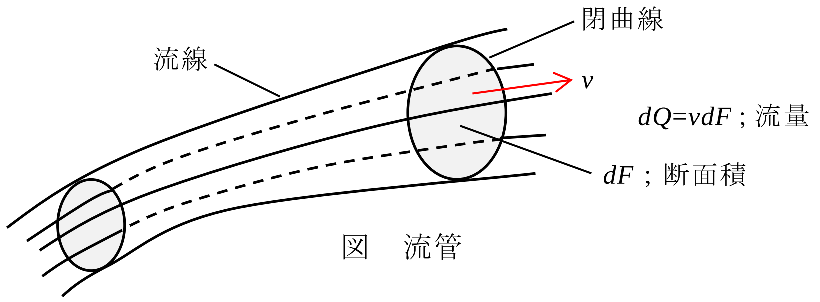
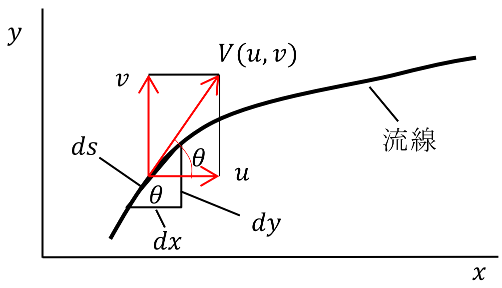



図　流管

＜流線の式（微分方程式）＞




$ds$；流線の線要素

$dx, dy$,；$ds$ の $x,y$ 方向の成分

$V(u,v)$；速度

●二次元流れでは

$$\tan\theta = \frac{dy}{dx} = \frac{v}{u}$$

$$\therefore \quad \frac{u}{dx} = \frac{v}{dy} \qquad (1.1)$$

$u,v$ が与えられ，（1.1）式の微分方程式を解くと，$x$ と $y$ の関係が求まる。

$$y = f(x) \qquad (1.1')$$

この式は，曲線を表す。これが流線である。

●三次元流れでは

流線の線要素 *ds* の *x,y,z* 成分；*dx,dy,dz*

速度 *V* の *x,y,z* 方向成分；*u,v,w*

ds と *V* の方向が一致するとする。

$$\frac{u}{dx} = \frac{v}{dy} = \frac{w}{dz} \tag{1.2}$$

or

$$\frac{u(x,y,z)}{dx} = \frac{v(x,y,z)}{dy} = \frac{w(x,y,z)}{dz} \tag{1.2′}$$

ここに

$u(x,y,z)$ ；流線上の任意の点$(x,y,z)$の位置での $x$ 軸方向の速度成分
$v(x,y,z)$ ；流線上の任意の点$(x,y,z)$の位置での $y$ 軸方向の速度成分
$w(x,y,z)$ ；流線上の任意の点$(x,y,z)$の位置での $z$ 軸方向の速度成分

●非定常三次元流では

$$\frac{u(x,y,z.t)}{dx} = \frac{v(x,y,z,t)}{dy} = \frac{w(x,y,z,t)}{dz} \tag{1.3}$$

ここに

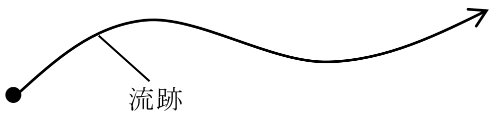
$u(x,y,z,t)$；任意瞬間 $t$ における流線上の任意の点$(x,y,z)$での $x$ 軸方向の速度成分
$v(x,y,z,t)$；任意瞬間 $t$ における流線上の任意の点$(x,y,z)$での $y$ 軸方向の速度成分
$w(x,y,z,t)$；任意瞬間 $t$ における流線上の任意の点$(x,y,z)$での $z$ 軸方向の速度成分

流線は，時間 $t$ のパラメーターとなり，時間とともに異なる流線となる。

（２）流跡（線）　**path line　or** 道筋

「特定位置の流体粒子が，時間の経過とともに動いてゆく**道筋**を流跡と呼ぶ。」

流れが定常的な時は，流線と流跡は，一致するが，非定常なときは，一致しない。




＜流跡線の式（微分方程式）＞

流体粒子の位置$(x, y, z)$は，時間 $t$ で変化する。

$x, y, z$方向の速度成分；$u, v, w$

Lagrange の式より（後述），

速度；

$$u = \frac{dx}{dt}, \qquad v = \frac{dy}{dt}, \qquad w = \frac{dz}{dt} \tag{1.4}$$

となる。

加速度；

$$\frac{d^2x}{dt^2}, \qquad \frac{d^2y}{dt^2}, \qquad \frac{d^2z}{dt^2} \tag{1.5}$$

(1.4), (1.5)式は，質点力学系と同様である。

（３）流脈（線）**streak line**　（色つき流線）

「空間的な固定点を通過したすべての流体粒子の任意の瞬間での位置を結んだ線を流脈線という。」

例：煙突からの煙，たばこの煙，流れ中にインクを注入

上述の（１），（２），（３）は，定常流ではすべて一致する。

# §２　連続の式　equation of continuity

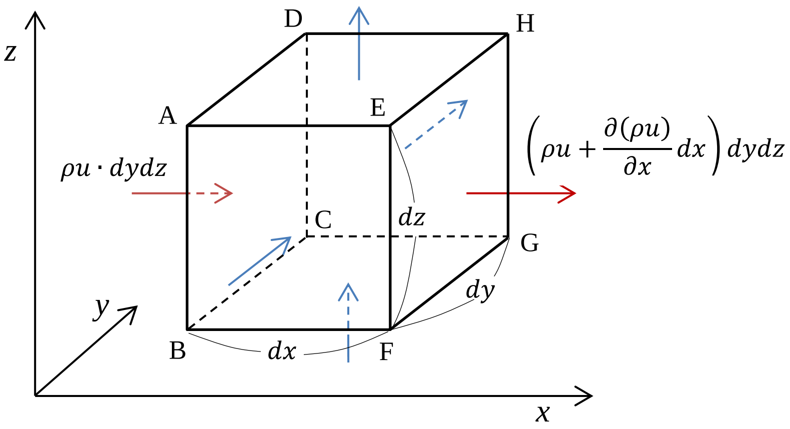



図　微小な直方体

$x, y, z$方向の速度成分；$u, v, w$
密度 $\rho$ が$(x, y, z, t)$の関数であるような**一般的な場合の連続の式**を導く。

図のように，流体中に微小な直方体の$dx, dy, dz$の流体要素を考える。

・単位時間内に $x$ 方向から流入する流入質量（ABCD 面より）

$$\rho u \cdot dy\mathrm{dz}$$

$\rho u$；単位面積を通過する質量
$dy\mathrm{dz}$；面積

・単位時間内に $x$ 方向へ流出する流出する流出質量（EFGH 面より）

$$\left(\rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x}dx\right)dydz$$

・結局，$x$ 軸方向の差し引き流入質量は（質量変化）は

$$-\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}dxdydz \qquad （イ）$$

となる。

同様にして，

・$y$ 軸方向の差し引き流入質量は（質量変化）は

$$-\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}dxdydz \qquad （ロ）$$

・z 軸方向の差し引き流入質量は（質量変化）は

$$-\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}dxdydz \qquad （ハ）$$

次に，直方体内の単位時間内の密度の増加は

$$\frac{\partial\rho}{\partial\ t}$$

であるから，直方体内の単位時間の質量の増加は

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}dxdydz \qquad (ニ)$$

以上の（イ），（ロ），（ハ）の質量の和が，単位時間内に流体要素内（微小直方体）にとどまる質量となり，この質量の総和は，質量保存の法則（物質不滅の法則）により，流体要素内（微小直方体内）の単位時間の質量の増加（ニ）と等しくなければいけない。

したがって

（イ）＋（ロ）＋（ハ）＝（ニ）

ゆえに

$$-\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}dxdydz-\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}dydzdx-\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}dzdxdy=\frac{\partial\rho}{\partial t}dxdydz$$

$$\therefore\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}=0 \qquad (2.1)$$

これが一般的な意味での（Euler の）連続の式である。

特に，定常圧縮性流体の場合には，$\frac{\partial}{\partial t}=0$だから

$$\therefore\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}=0 \qquad (2.2)$$

（定常圧縮性流体の連続の式）

また，流体が定常非圧縮性のときには，$\rho=\mathrm{const}$であるから，（2.1）式は

$$\rho\frac{\partial u}{\partial x}+\rho\frac{\partial v}{\partial y}+\rho\frac{\partial w}{\partial z}=0$$

$$\therefore\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0 \qquad (2.3)$$

（定常非圧縮性流体の連続の式）

となる。

（2.3）式が普通の意味での**連続の式**であり，完全流体の研究では，重要な役割を持つ。

# §３　運動方程式　equation of motion

この運動方程式は, Newton の運動の第二法則を流体の微小部分について表したものである。

参考；

Newton の第二法則

慣性力＝質量力+圧力+粘性力

（慣性力＝質量・加速度　$F = m\alpha$）

本章では，完全流体 perfect fluid or 理想流体 ideal fluid　について取り扱うので，流体は非粘性，非圧縮性と仮定して，記述している。

流体の運動を論ずるのに，次の二通りの方法がある。

（１）**Euler の方法**；ドイツ人，（1707～1783）

「空間の一定点に着目して，そこを通る流体粒子（or 実質部分）の速度，方向，密度，圧力等の変化を調べる方法である。つまり，同一場所ですべての点の流体粒子の動きを観察する方法で，これを**統計的方法** statistical method という。」

空間中の任意の点；$x,y,z$

任意の時刻　　；$t$

$x,y,z$ の速度成分　；$u,v,w$

とすると

速度は,

$$u = f_1(x,y,z,t)$$
$$v = f_2(x,y,z,t)$$
$$w = f_3(x,y,z,t)$$

また，圧力 $p$ は

$$p = f_4(x,y,z,t)$$

と記述される。

（２）**Lagrange の方法**；フランス人，（1736～1813），1760 年頃より研究

「任意の流体粒子に着目し，その運動を追跡して観察する方法を Lagrange の方法といい，**歴史的方法** historical method と言われている。」

（例）観測者が，流体粒子とともに行動を同じくしている場合を，調べる。

・時刻　$t$=0 のとき；

$$x = a$$
$$y = b$$
$$z = c$$

・時間の経過とともに，位置が変わるから，任意の時刻 $t$ の時の流体粒子の位置は；

$$x = g_1(a, b, c, t)$$
$$y = g_2(a, b, c, t)$$
$$z = g_3(a, b, c, t)$$

また，圧力 $p$ は；

$$p = g_4(a, b, c, t)$$

以上の二つの方法が有名であるが，流体力学では，Euler の方法が多く使用されるので，次に，Euler の方法について述べる。

## ＜Euler の運動方程式＞　統計的方法

Euler の方法では，ある時刻 $t$ における任意の点$\mathrm{P}(x,y,z)$での速度成分$u,v,w$は，$x,y,z,t$の関数となるから

$$u = f_1(x,y,z,t)$$
$$v = f_2(x,y,z,t)$$
$$w = f_3(x,y,z,t)$$

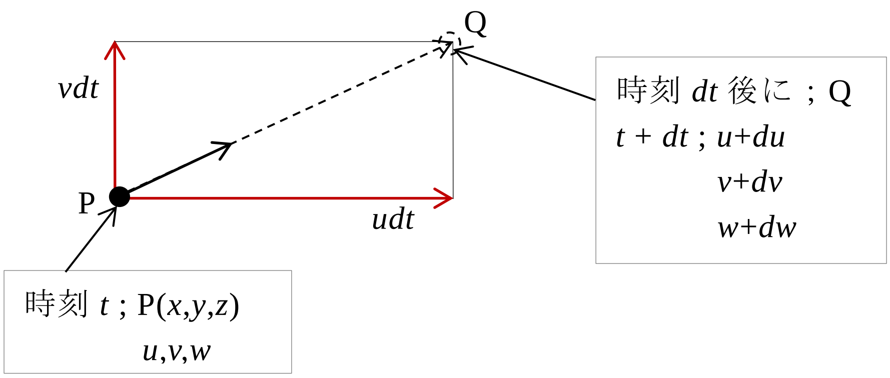
となる。

or

$$u = u(x,y,z,t)$$
$$v = v(x,y,z,t)$$
$$w = w(x,y,z,t)$$

今，時刻 $t$ での点$\mathrm{P}(x,\mathrm{y},\mathrm{z})$の流体粒子が，短い時間 $dt$ 後に，$\mathrm{Q}(x+dx,y+dy,z+dz)$に移動したとすると，

$$dx = udt$$
$$dy = vdt$$
$$dz = wdt$$




となる。

点 Q における $x$ 方向の速度成分は

$$u+du = f_1(x+dx, y+dy, z+dz,)$$
$$= f_1(x+udt, y+vdt, z+wdt)$$

となる。

Taylor 展開すると

$$u + du = f_1(x,y,z,t) + \frac{\partial f_1}{\partial t}dt + \frac{\partial f_1}{\partial x}udt + \frac{\partial f_1}{\partial y}vdt + \frac{\partial f_1}{\partial z}wdt + \cdots$$

$$= u(x,y,z,t) + \frac{\partial u}{\partial t}dt + \frac{\partial u}{\partial x}udt + \frac{\partial u}{\partial y}vdt + \frac{\partial u}{\partial z}wdt + \cdots$$

となる。

加速度成分$(x,y,z$方向$)$

$$\frac{Du}{Dt}, \frac{Dv}{Dt}, \frac{Dw}{Dt}$$

は，次のようになる。

$x$ 軸方向の加速度成分は

$$\frac{Du}{Dt} = \lim_{dt\to 0}\frac{du}{dt} = \lim_{dt\to 0}\frac{(u+du)-(u)}{dt}$$

$$= \lim_{dt\to 0}\frac{f_1(x+udt, y+vdt, z+wdt) - f_1(x,y,z,t)}{dt}$$

$$= \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}$$

となる。

$\frac{Du}{Dt}$ ：本質的微分(実質微分)

$\frac{\partial u}{\partial t}$ ：局所的部分

$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}$ ：定常的(対流的微分)部分

同様に，$y,z$成分も求められる。

結局，**$\boldsymbol{x,y,z}$軸方向の加速度成分は**

$$\frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}$$
$$\frac{Dv}{Dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}$$
$$\frac{Dw}{Dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} \tag{3.1}$$

となる。

## ＜Lagrange の方法による加速度のときは＞

$$\frac{du}{dt},\quad \frac{dv}{dt},\quad \frac{dw}{dt}$$

と表示する。

$\boldsymbol{\frac{Du}{Dt}}$**の意味；（Elerの方法のときに使用）**

$$\frac{Du}{Dt}=\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}$$

$\frac{Du}{Dt}$　：任意の点における　実質加速度

$\frac{\partial u}{\partial t}$　：局所的加速 ①

$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}$ ：定常的加速度（対流的加速度）②

（例）①局所的加速度⇒断面一様な管で流量が変化するとき；

$\frac{\partial u}{\partial t}$　の加速度が存在する。

②定常的加速度（対流的加速度）⇒断面積が一様でない管の場合；
速度は，場所の関数となる。

公式；本質的微分

$$\frac{D}{Dt}=\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}+w\frac{\partial}{\partial z}$$

$\frac{D}{Dt}$　：本質的微分

$\frac{\partial}{\partial t}$　：局所的微分

$u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}+w\frac{\partial}{\partial z}$ ：対流的微分

## 次に，＜流体の運動方程式は＞

Newton の第二法則

　　慣性力＝質量力（物体力）＋ 圧力による力+粘性力

より，導き出される。

運動している流体に働く力は，次の４種類の力が作用する。

（１）慣性力　inertia force

（２）質量力　body force　⇒　外力 external force，例えば，重力のような力

（３）圧力差による力　pressure force

（４）粘性による力　viscous force

以上の力について考えるとよい。

図に示すような，微小な直方体を考える。

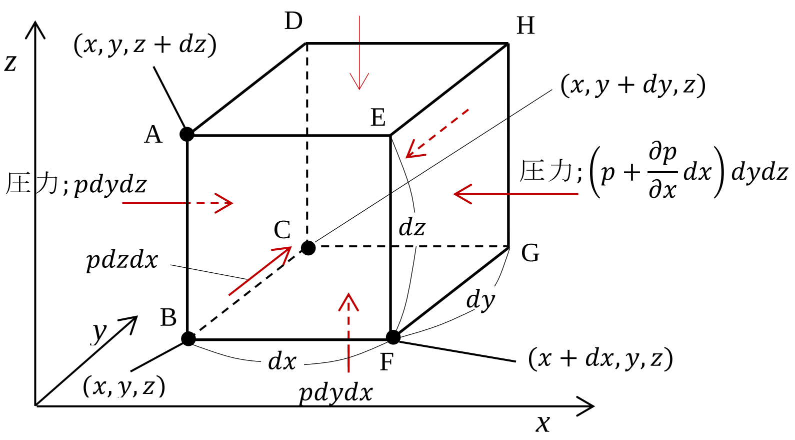



図　微小な直方体

今，完全流体を考えるから，粘性力を考えない。

　流体の密度　；$\rho$

　単位質量当たりの外力（例えば，重力）；$X, Y, Z$

とすると

　単位体積当たりの$x, y, z$方向への外力（質量力）；$\rho X, \rho Y, \rho Z$

である。

　したがって，$x, y, z$ 方向への質量力は

$$\rho X \cdot dxdydz$$

$$\rho Y \cdot dxdydz$$

$$\rho Z \cdot dxdydz \qquad ①$$

となる。

次に，圧力による力は

$x$ 方向($dydz$ 面)

$$pdydz-\left(p+\frac{\partial p}{\partial x}dx\right)dydz=-\frac{\partial p}{\partial x}dxdydz$$

$y$ 方向($dzdx$ 面)

$$pdzdx-\left(p+\frac{\partial p}{\partial y}dy\right)dzdx=-\frac{\partial p}{\partial y}dydzdx$$

$z$ 方向($dxdy$ 面)

$$pdxdy-\left(p+\frac{\partial p}{\partial z}dz\right)dxdy=-\frac{\partial p}{\partial z}dzdxdy \qquad ②$$

したがって，運動の第二法則より（①+②）

慣性力＝質量力+圧力

$x$ 軸方向の運動方程式は

$$\rho dxdydz\frac{Du}{Dt}=\rho Xdxdydz-\frac{\partial p}{\partial x}dxdydz$$

$$\therefore\ \rho\frac{Du}{Dt}=\rho X-\frac{\partial p}{\partial x}$$

となる。

$y, z$ 方向も同様に求められる。

したがって，$x, y, z$ 成分についての**理想流体（非粘性）に対する運動方程式は**

$$\frac{Du}{Dt}=X-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\frac{Dv}{Dt}=Y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}$$

$$\frac{Dw}{Dt}=Z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} \qquad (3.2)$$

or

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}=X-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}=Y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}=Z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} \qquad (3.2')$$

（1.10），（1.10’）は，圧縮性，非圧縮性流体のいずれにも適用できる。

この式を**オイラーの運動方程式** Euler’s equation of motion といい，理想流体の運動を調べるときの基本式となる。

# §４　流体要素の変形

流体が流れているときの流体要素が，どのように変形するかについて考える。
今，簡単のために，定常流とする。
・流体内の任意の点P$(x, y, z)$の速度成分を，$u, v, w$とする。

・点Ｐに非常に近接した点$\mathrm{P}'(x+dx, y+dy, z+dz)$の速度成分を

$$u+du, v+dv, w+dw$$

とすると

$$u+du = u(x+dx, y+dy, z+dz)\,, or = f_1(x+dx, y+dy, +z+dz)$$
$$v+dv = v(x+dx, y+dy, z+dz)\,, or = f_2(x+dx, y+dy, +z+dz)$$
$$w+dw = w(x+dx, y+dy, z+dz)\,, or = f_3(x+dx, y+dy, +z+dz)$$

となる。

これを Taylor 展開して，$dx$,dy,dz の二次項の微小量を無視すると

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz$$
$$dv = \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy + \frac{\partial v}{\partial z}dz$$
$$dw = \frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy + \frac{\partial w}{\partial z}dz \qquad (4.1)$$

となる。

これは, 点Ｐと点Ｐ'の相対速度であり, この相対速度によって流体要素は変形する。

（4.1）式中の

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial z}, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial z}$$

の９個の物理的意味を，次の３つの場合について調べてみよう。

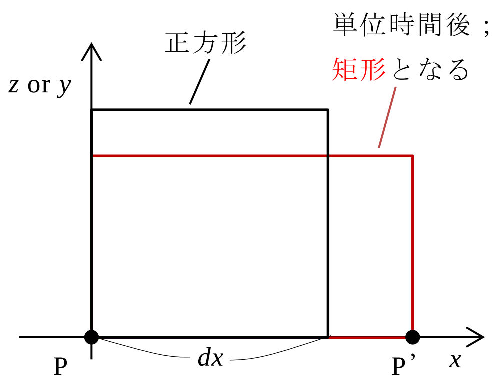
## (ｉ) $\frac{\partial u}{\partial x}$以外の　すべてが0の場合　(伸び変形)

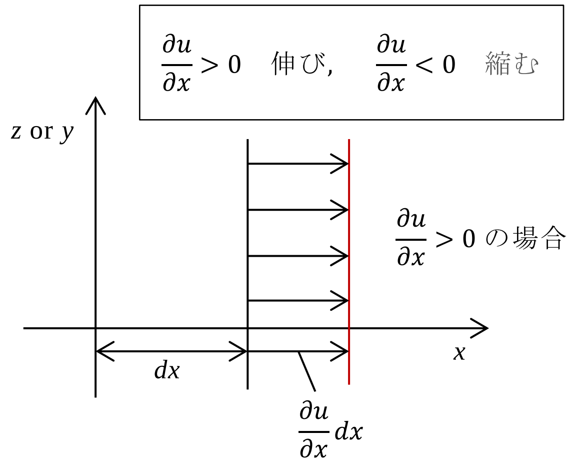
（4.1）式は

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx, \qquad dv = 0, \qquad dw = 0 \tag{4.2}$$

となる。

P：原点にとると




$\frac{\partial u}{\partial x}$：**伸長速度** velocity of extension　という。

$yz$に平行な面が$x$方向に伸びる速度。($dx = 1$ を単位長さにとる)

同様にして

$\frac{\partial v}{\partial y}$：$zx$面の$y$方向への**伸長速度**

$\frac{\partial w}{\partial z}$：$xy$面の$z$方向への**伸長速度**

## （ⅱ）$\frac{\partial u}{\partial y}$以外の　すべてが0の場合　（せん断変形）

（1.11）式は

$$du = \frac{\partial u}{\partial y}dy, \qquad dv = 0, \qquad dw = 0 \tag{4.3}$$

また

## $\frac{\partial v}{\partial x}$以外の　すべてが0の場合

$$du = 0, \qquad dv = \frac{\partial v}{\partial x}dx, \qquad dw = 0 \tag{4.3'}$$

となる。

$\frac{\partial u}{\partial y}$は；$x$に平行な面の$x$方向への　**すべり速度** shearing stress　を表す。

$\frac{\partial v}{\partial x}$ は；$yz$に平行な面の$y$方向への　**すべり速度**　を表す。

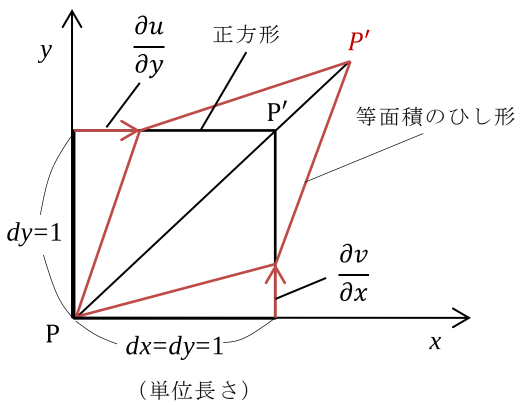



図　せん断変形

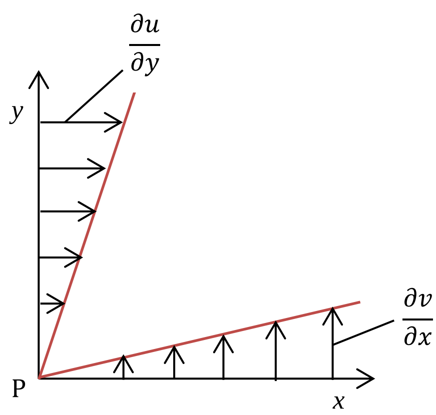



図　すべり速度

故；

$\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}$は，$xy$面内の正方形が等面積のひし形に歪む割合を示す。**せん断変形**

同様に

$\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}$は，$yz$面内の正方形が等面積のひし形に歪む割合を示す。**せん断変形**

$\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}$は，$zx$面内の正方形が等面積のひし形に歪む割合を示す。**せん断変形**

(ⅲ) $\dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y}$ は，　(回転変形)

図に示すように，*xy* 面内の正方形が P 点のまわりに回転する割合を示す。

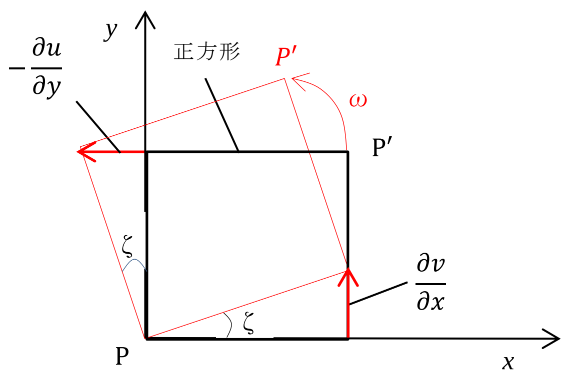



図　回転変形

今

**二次元　*xy* 面内の回転**
角速度　；　$\omega$
*z* 軸まわりを回転する場合を考える。

P’(*x*,*y*)の速度成分 *u*,*v* は

$$u = -\omega y$$
$$v = \omega x$$

だから

$$\frac{u}{y} = -\omega \quad , \qquad \frac{v}{x} = \omega$$

$$\therefore \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \omega - (-\omega) = 2\omega \tag{4.4}$$

$$\therefore \omega = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) \tag{4.5}$$

故，（4.5）式は，流体要素の **z 軸まわりの角速度**を表す。

次に，同様にして三次元の場合，*x, y, z* 軸まわりの角速度は

$$\xi = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)$$
$$\eta = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)$$
$$\zeta = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) \qquad (4.6)$$

となる。

$\xi$, $\eta$, $\zeta$ ; 回転角速度の成分（or Spin の成分）

$2\xi$, $2\eta$, $2\zeta$ ; **渦度**(vorticity)

$$2\xi = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}$$
$$2\eta = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}$$
$$2\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

● $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta = 0$ の場合の流れ； (4.6')

**非回転運動**（or 渦なし流れ）Irotational motion

● $\xi$, $\eta$, $\zeta$ のすべて，または いずれかの一つが 0 でない場合の流れ；(4.6'')

**回転運動** Rotational motion

or

**渦運動** Vortex motion

（渦流れ）

という。