3

９．一次元圧縮性流れ

9.1 エネルギーの式
9.2 よどみ点状態　全温度，静温度
9.3 圧縮性　速度の算出方法

＜マッハ数ー全圧ー静圧の**重要な式**＞（理論式）

9.4 圧縮性流れの速度，マッハ数，質量流束の算出

９．一次元圧縮性流れ

断熱変化する等エントロピー流れと仮定！

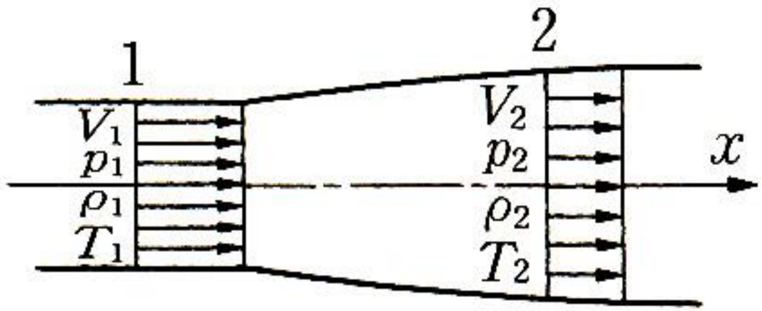


図9.1 一次元流れ

管路内流れの断面積が緩やかに変化する場合の流れの速度、圧力、密度、温度などが管軸方向には変化するが、管軸に垂直な断面では、変化しない一様な流れ。

一次元圧縮性流れ(one-dimentional compressible flow) という。

気体は完全気体とし，流れは一次元の定常で，断熱変化する等エントロピー流れとする。

このような理論的な流れの取り扱いは

⇒ 実際の粘性流体の流れにおいても断熱流れであれば近似的に成立すると考えてよい。

9.1 エネルギーの式

＜エネルギーの式（定常　断熱）＞

流れが定常で断熱的であれば、気体のエンタルピーをh (J/kg)とすると、熱力学第一法則を用いて，次のエネルギーの式が成立する。

$$h+\frac{V^2}{2}=const \quad (h:\text{エンタルピー}) \tag{9.1}$$

$$c_p T+\frac{V^2}{2}=const \tag{9.2}$$

$$\frac{\kappa}{\kappa-1}RT+\frac{V^2}{2}=const \tag{9.3}$$

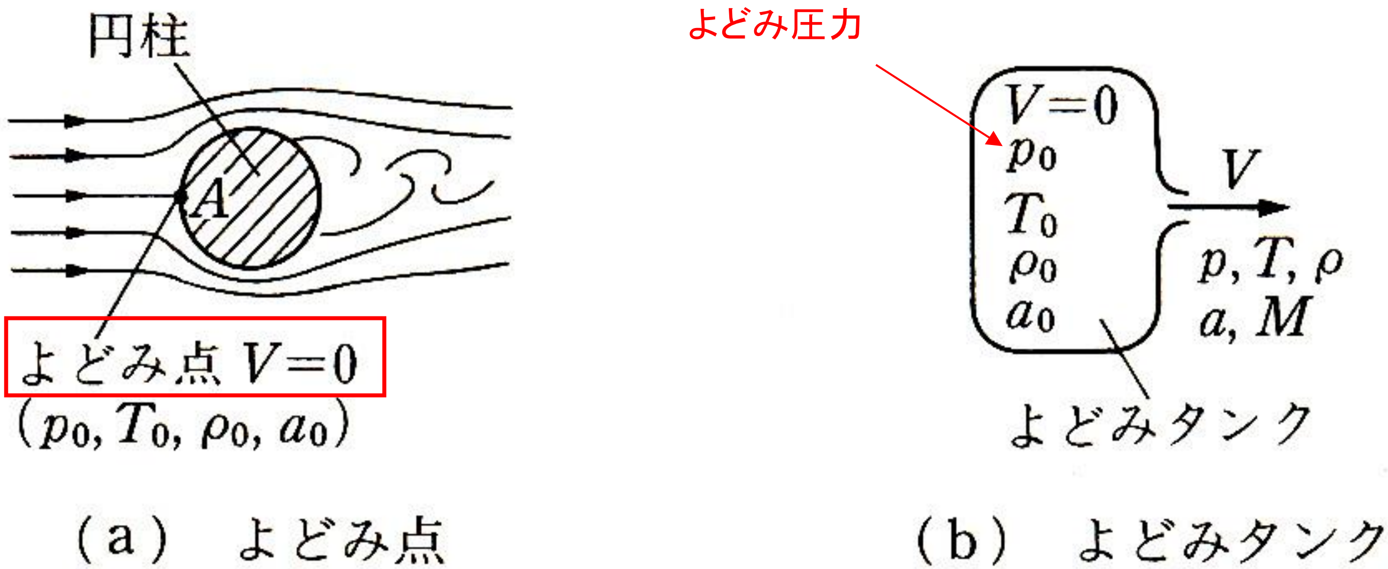
$$\frac{\kappa}{\kappa-1}\frac{p}{\rho}+\frac{V^2}{2}=const \tag{9.4}$$

上述の式は，流れに粘性がある場合や衝撃波が生じてエントロピーが増加するような不可逆的な場合でも成立する！

速度と音速の関係式は

$$\frac{a^2}{\kappa-1}+\frac{V^2}{2}=const \tag{9.5}$$

9.2 よどみ点状態　全温度，静温度



p_0:よどみ点圧力
全圧
|
T_0:よどみ点温度
全温度
|
p:静圧
T:静温度

図9.2　よどみ点状態

図(b)のように、よどみタンクから気体が噴出する場合

$$\frac{\kappa}{\kappa-1}\frac{p}{\rho}+\frac{V^2}{2}=\frac{\kappa}{\kappa-1}\frac{p_0}{\rho_0} \tag{9.6}$$

$$c_p+\frac{V^2}{2}=c_pT_0 \tag{9.7}$$

or

$$T+\frac{V^2}{2c_p}=T_0 \tag{9.8}$$

T : 静温度
$V^2/(2c_p)$: 動温度
T_0 : 全温度

【10.5】 温度 20 °Cにおける空気の音速を求めよ。また，液体の音速の式を導き，水の音速 a を求めよ。ただし，水の体積弾性係数 $K=2.13\times10^6$ kPa（表1.8参照），密度 $\rho=998$ kg/m³ とする。

〔解〕 空気の音速は，式(10.34)より

$$a=\sqrt{\kappa RT}=\sqrt{1.4\times287.03\times(273.15+20)}=343.2\ \mathrm{m/s}$$

つぎに，液体の音速を導く。液体が圧縮されるとき，等エントロピー的に行われる場合の等エントロピー体積弾性係数を K_s，また，等エントロピー圧縮率を β_s とすると，式(10.28)と同じつぎの関係式が成り立つ。

$$K_s=\frac{1}{\beta_s}=\rho\frac{dp}{d\rho}=\kappa p \qquad (10.107)$$

$$\therefore \quad \frac{dp}{d\rho}=\frac{K_s}{\rho} \qquad (10.108)$$

したがって，液体の音速 a は，式(10.34)に式(10.108)を代入して

$$a=\sqrt{\frac{K_s}{\rho}} \qquad (10.109)$$

ゆえに，水の音速 a は，式(10.109)より

$$a=\sqrt{\frac{K_s}{\rho}}=\sqrt{\frac{2.13\times10^9}{998}}=1\,461\ \mathrm{m/s}$$

なお，上式(10.109)は，当然ながら等エントロピー的に変化する完全気体の音速の式(10.36)と同じである。

【10.6】 ジェット機が，温度−40 °Cの大気中を速度 550 m/s で飛行している。このときの音速とジェット機のマッハ数を求めよ。

〔解〕 音速 a は，式(10.34)より

$$a=\sqrt{\kappa RT}=\sqrt{1.4\times287.03\times(273.15-40)}=306.1\ \mathrm{m/s}$$

マッハ数 M は，式(10.37)より

$$M=\frac{V}{a}=\frac{550}{306.1}=1.80$$

【10.7】 つぎの状態における空気の音速を求めよ。

（1） 温度 450 K

（2） 圧力 800 kPa，密度 8.5 kg/m³

（3） 定圧比熱 1 020 J/(kg·K)，比熱比 1.4，温度 300 K

〔解〕 （1） 式(10.34)より

$$a=\sqrt{\kappa RT}=\sqrt{1.4\times287.03\times450}=425.2\ \mathrm{m/s}$$

（2） $$a=\sqrt{\kappa\frac{p}{\rho}}=\sqrt{1.4\times\frac{800\times10^3}{8.5}}=363.0\ \mathrm{m/s}$$

（3） 式(10.13)と式(10.34)より

$$a=\sqrt{\kappa RT}=\sqrt{(\kappa-1)c_pT}=\sqrt{(1.4-1)\times1\,020\times300}=349.9\ \mathrm{m/s}$$

【10.8】 超音速風洞を用いて，ジェット戦闘機の模型の先端から生じる衝撃波を観察し，マッハ円すいのマッハ角を測定したところ35°であった。大気の温度を20℃として，ジェット戦闘機の速度とマッハ数を求めよ。

〔解〕 20℃の音速 a は，式(10.34)より

$$a=\sqrt{\kappa RT}=\sqrt{1.4\times 287.03\times(273.15+20)}=343\ \mathrm{m/s}$$

つぎに，速度 V とマッハ数 M は，式(10.38)よりつぎの値を得る。

$$V=\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{343}{\sin 35^\circ}=598\ \mathrm{m/s}$$

$$M=\frac{1}{\sin\alpha}=\frac{1}{\sin 35^\circ}=1.74$$

【10.9】 よどみタンクでの圧力101.3 kPa，密度1.8 kg/m³の空気が，タンクに取り付けられたノズルから真空中に連続的に噴出している。ノズル出口での圧力を0として，空気の噴出する最大速度およびマッハ数を求めよ。

〔解〕 エネルギーの式(10.44)

$$\frac{\kappa}{\kappa-1}\frac{p}{\rho}+\frac{V^2}{2}=\frac{\kappa}{\kappa-1}\frac{p_0}{\rho_0}$$

において，出口圧力が0であるから最大速度 V は

$$V=\sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa-1}\frac{p_0}{\rho_0}}=\sqrt{\frac{2\times 1.4}{1.4-1}\times\frac{101.3\times 10^3}{1.8}}=627.6\ \mathrm{m/s}$$

つぎに，マッハ数 M は，式(10.34)，(10.37)より

$$M=\frac{V}{a}=\frac{V}{\sqrt{\kappa p/\rho}}=\frac{627.6}{\sqrt{1.4\times 101.3\times 10^3/1.8}}=2.24$$

【10.10】 よどみタンク内にある温度310 Kの空気が，ノズルから真空中に噴出する場合の音速と可能な最大噴出速度を求めよ。

〔解〕 式(10.34)より，よどみタンク内の音速 a_0 は

$$a_0=\sqrt{\kappa RT_0}=\sqrt{1.4\times 287.03\times 310}=352.9\ \mathrm{m/s}$$

つぎに，可能な最大噴出速度 V は，流れがノズルの出口面で真空にいたるまで膨張すると仮定すれば，式(10.44)において $p=0$ とおき，$\kappa p_0/\rho_0=a_0^2$ であるから次式より

$$V=\sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa-1}\frac{p_0}{\rho_0}}=a_0\sqrt{\frac{2}{\kappa-1}}=352.9\times\sqrt{\frac{2}{1.4-1}}=789.1\ \mathrm{m/s}$$

9.3 圧縮性　速度の算出方法

（マッハ数ー全温度ー静温度）

＜マッハ数ー全圧ー静圧の重要な式＞（理論式）

②
$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{\kappa - 1}{2} M^2 \tag{9.9}$$

①
$$\frac{p_0}{p} = \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} M^2\right)^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}} \tag{9.10}$$

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} M^2\right)^{\frac{1}{\kappa - 1}} \tag{9.11}$$

①式でマッハ数M
②式で静温T
③式で速度Vを算出

上式から，速度Vを求めることができる！

$$V = M \cdot a = M(\kappa \cdot R \cdot T)^{1/2} \tag{9.12}$$

$T = T_0 / \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} M^2\right)$ だから

③
$$\therefore\ V = M \cdot a = M(\kappa R T)^{1/2} = M\sqrt{\kappa R T_0}\left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} M^2\right)^{-\frac{1}{2}} \tag{9.13}$$

9.4 圧縮性流れの速度，マッハ数，質量流束の算出

＊　近似的に等エントロピの関係式が成立すると仮定

＜噴流局所のマッハ数、静温、速度、密度、質量流速の求め方＞

◎全圧、静圧、全温度をピトー管で測定して求める。
◎学会発表、掲載論文集⇒下記式で算出　((9.14)式～(9.19)式)

噴流局所のマッハ数

$$M=\left[\left\{\left(\frac{p_t}{p_s}\right)^{(\kappa-1)/\kappa}-1\right\}\frac{2}{\kappa-1}\right]^{1/2} \quad (9.14)$$

噴流局所の静温度

$$Ta=\frac{Tp}{1+\left(\boxed{k}\frac{\kappa-1}{2}M^2\right)} \quad (9.15)$$

噴流局所の速度

$$V=M\cdot a=M(\kappa\cdot R\cdot Ta)^{1/2} \quad (9.16)$$

噴流局所の密度

$$\rho=\frac{p_s}{R\cdot Ta} \quad (9.17)$$

噴流局所の質量流束

$$G=\rho\cdot V \quad (9.18)$$

V	:	速度	(m/s)
a	:	音速	(m/s)
p_t	:	全圧	(Pa)
p_s	:	静圧	(Pa)
κ	:	空気の比熱比 (κ = 1.4)	

ただし，k ：温度プローブ修正係数＝0.843

T_p ：プローブでの検出温度

$$k=(Tp-Ta)/(To-Ta)$$