演習問題編

第 10 章　演　習　問　題

［問題 10.1］ 温度 20℃の空気のガス定数を $R = 287.03$ J/(kg･K)とし，圧力 1atm の状態における空気の密度を求めよ。

［解］ 温度 $T = 273.15+20 = 293.15$ K, 圧力 $p = 1$ atm $= 101.3$ kPa であるから, 式(10.1)より

$$\rho = \frac{p}{RT} = \frac{101.3\times10^3}{287.03\times293.15} = 1.20\ \mathrm{kg/m^3}$$

なお，同じ状態における水の密度は 998 kg/m^3 であるから，空気の密度は，水の密度の約 1/830 である。

［問題 10.2］ 温度 293 K の空気のガス定数を R=287.03 J/(kg･K)，比熱比 κ =1.4 として，空気の定容比熱と定圧比熱を求めよ。

［解］ 式(10.13)より

$$c_v = \frac{1}{\kappa-1}R = 7.18\times10^2\ \mathrm{J/(kg\,K)}, \qquad c_p = \frac{\kappa}{\kappa-1}R = 1.005\times10^3\ \mathrm{J/(kg\,K)}$$

［問題 10.3］ よどみタンクでの空気の温度が 2300 K であるとき，この空気の 1 kg 当たりのエンタルピーh を求めよ。

［解］ 式(10.15)より

$$h = \frac{\kappa}{\kappa-1}RT = \frac{1.4}{1.4-1}\times287.03\times2300 = 2.31\times10^6\ \mathrm{J} = 2.31\ \mathrm{MJ}$$

［問題 10.4］ 遠心式圧縮機によって圧力 150 kPa の空気を，800 kPa まで等エントロピー的に圧縮するとき，この遠心式圧縮機による空気の温度変化と内部エネルギーの変化を求めよ。ただし，初めの空気の温度を 293 K とする。

［解］ 初めの状態の温度，圧力に添え字 0 を付けると，式(10.21)より

$$\frac{T}{T_0}=\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}$$

$$\therefore \quad T=T_0\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}=293\times\left(\frac{800\times10^3}{150\times10^3}\right)^{\frac{1.4-1}{1.4}}=472.6 \ \ \mathrm{K}$$

したがって，空気の温度変化は

$$T-T_0=472.7-293=179.6 \ \ \mathrm{K}$$

となる。内部エネルギーの変化は，式(10.7)を積分した次式に前問で得られた c_v と上で得られた温度変化の値を代入すると求まる。

$$e-e_0=c_v\left(T-T_0\right)=7.18\times10^2\times179.6=1.29\times10^5 \ \ \mathrm{J\ /\ l}$$

［問題 10.5］ 温度 20℃における空気の音速を求めよ。また，液体の音速の式を導き，水の音速 a を求めよ。ただし，水の体積弾性係数 $K=2.13\times10^6$ kPa（第 1 章表 1.8 参照），密度 $\rho=998$ kg/m^3 とする。

［解］ 空気の音速は，式(10.34)より

$$a=\sqrt{\kappa RT}=\sqrt{1.4\times287.03\times(273.15+20)}=343.2 \ \ \mathrm{m\ /}$$

となる。

次に，液体の音速を導く。液体が圧縮されるとき，等エントロピー的に行われる場合の**等エントロピー体積弾性係数**を K_s，また，**等エントロピー圧縮率**を β_s とすると，式(10.28)と同じ次の関係式が成り立つ。

$$K_s=\frac{1}{\beta_s}=\rho\frac{dp}{d\rho}=\kappa p \tag{10.107}$$

$$\therefore \frac{dp}{d\rho}=\frac{K_s}{\rho} \tag{10.108}$$

したがって，液体の音速 a は，式(10.34)に式 (10.108)を代入して

$$a=\sqrt{\frac{K_s}{\rho}} \tag{10.109}$$

となる。ゆえに，水の音速 a は，式(10.109)より

$$a=\sqrt{\frac{K_s}{\rho}}=\sqrt{\frac{2.13\times10^9}{998}}=1461\ \mathrm{m}\ /$$

となる。なお，上式(10.109)は，当然ながら等エントロピー的に変化する完全気体の音速の式(10.36)と同じである。

［問題 10.6］ジェット機が温度－40℃の大気中を速度 550 m/s で飛行している。このときの音速とジェット機のマッハ数を求めよ。

［解］ 音速 a は，式(10.34)より

$$a=\sqrt{\kappa RT}=\sqrt{1.4\times287.03\times(273.15-40)}=306.1\ \mathrm{m}\ /$$

マッハ数 M は，式(10.37)より

$$M=V/a=550/306.1=1.80$$

となる。

［問題 10.7］ 次の状態における空気の音速を求めよ。

（1）温度 450 K

（2）圧力 800 kPa，密度 8.5 kg/m^3

（3）定圧比熱 1020 J/(kg･K)，比熱比 1.4，温度 300 K

［解］（1） 式(10.34)より

$$a=\sqrt{\kappa RT}=\sqrt{1.4\times287.03\times450}=425.2\ \mathrm{m}\ /$$

（2） $a=\sqrt{\kappa\frac{p}{\rho}}=\sqrt{1.4\times\frac{800\times10^3}{8.5}}=363.0\ \mathrm{m/s}$

（3） 式(10.13)と(10.34)より

$$a=\sqrt{\kappa RT}=\sqrt{(\kappa-1)\ c_pT}=\sqrt{(1.4-1)\times1020\times300}=349.9\ \mathrm{m}\ /$$

［問題 10.8］ 超音速風洞を用いて，ジェット戦闘機の模型の先端から生じる衝撃波を観察し，マッハ円錐のマッハ角を測定したところ 35°であった。大気の温度を 20℃として，ジェット戦闘機の速度とマッハ数を求めよ。

［解］20℃の音速 a は，式(10.34)より

$$a = \sqrt{\kappa RT} = \sqrt{1.4 \times 287.03 \times (273.15 + 20)} = 343 \text{ m /}$$

次に，速度 V とマッハ数 M は，式(10.38)より次の値を得る。

$$V = \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{343}{\sin 35^\circ} = 598 \text{ m /}$$

$$M = \frac{1}{\sin\alpha} = \frac{1}{\sin 35^\circ} = 1.74$$

［問題 10.9］よどみタンクでの圧力 101.3 kPa，密度 1.8 kg/m^3 の空気が，タンクに取り付けられたノズルから真空中に連続的に噴出している。ノズル出口での圧力を 0 として，空気の噴出する最大速度およびマッハ数を求めよ。

［解］エネルギーの式(10.44)

$$\frac{\kappa}{\kappa-1}\frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} = \frac{\kappa}{\kappa-1}\frac{p_0}{\rho_0}$$

において，出口圧力が 0 であるから最大速度 V は

$$V = \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa-1}\frac{p_0}{\rho_0}} = \sqrt{\frac{2 \times 1.4}{1.4-1} \times \frac{101.3 \times 10^3}{1.8}} = 627.6 \text{ m /}$$

となる。次に，マッハ数 M は，式(10.34), (10.37)より

$$M = \frac{V}{a} = \frac{V}{\sqrt{\kappa p/\rho}} = \frac{627.6}{\sqrt{1.4 \times 101.3 \times 10^3 / 1.8}} = 2.24$$

となる。

［問題 10.10］よどみタンク内にある温度 310 K の空気が，ノズルから真空中に噴出する場合の音速と最大可能な噴出速度を求めよ。

［解］式(10.34)より，よどみタンク内の音速 a_0 は

$$a_0 = \sqrt{\kappa RT_0} = \sqrt{1.4 \times 287.03 \times 310} = 352.9 \text{ m /}$$

次に，最大可能な噴出速度 V は，流れがノズルの出口面で真空にいたるまで膨張すると仮定すれば，式(10.44)において $p = 0$ とおき，$\kappa p_0 / \rho_0 = a_0{}^2$ であるか

ら次式で求まり

$$V=\sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa-1}\frac{p_0}{\rho_0}}=a_0\sqrt{\frac{2}{\kappa-1}}=352.9\times\sqrt{\frac{2}{1.4-1}}=789.1\ \mathrm{m}\ /$$

となる。

［問題 10.11］ よどみタンクで圧力 101.3 kPa，密度 1.5 kg/m^3 の空気が，ノズルから等エントロピー的に真空中に噴出しているとする。この空気のマッハ数 M が 1.9 になったときの圧力 p，密度 ρ および速度 V を求めよ。

［解］ 圧力と密度は，それぞれ式(10.48)，(10.49)より

$$p=\frac{p_0}{\left[1+\{(\kappa-1)/2\}M^2\right]^{\kappa/(\kappa-1)}}$$

$$=\frac{101.3}{\left[1+\{(1.4-1)/2\}\times1.9^2\right]^{1.4/(1.4-1)}}=15.12\ \mathrm{k\ P} \qquad (1)$$

$$\rho=\frac{\rho_0}{\left[1+\{(\kappa-1)/2\}M^2\right]^{1/(\kappa-1)}}$$

$$=\frac{1.5}{\left[1+\{(1.4-1)/2\}\times1.9^2\right]^{1/(1.4-1)}}=0.385\ \mathrm{k\ g}\ /^3 \qquad (2)$$

となる。次に，速度 V は，式(10.44)を変形した次式より求める。

$$V=\sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa-1}\left(\frac{p_0}{\rho_0}-\frac{p}{\rho}\right)} \qquad (3)$$

式(3)に，κ，p_0，ρ_0 および式(1)，(2)で得られた p，ρ の値を代入して

$$V=\sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa-1}\left(\frac{p_0}{\rho_0}-\frac{p}{\rho}\right)}=\sqrt{\frac{2\times1.4}{1.4-1}\times\left(\frac{101.3\times10^3}{1.5}-\frac{15.12\times10^3}{0.385}\right)}=444.8\ \mathrm{m}\ /$$

となる。

［問題 10.12］ 一次元流れで，定常な断熱変化をする等エントロピー流れにおけるエネルギーの式(10.39)，すなわち $h+V^2/2=\mathrm{const}$ は，エントロピーが一定となることを証明せよ。

［解］ 等エントロピー流れのエネルギーの式(10.39)を微分形で表すと

$$dh + VdV = 0 \tag{10.110}$$

また, 式(10.55)の等エントロピー流れにおけるオイラーの運動方程式 $VdV + dp / \rho = 0$ より

$$VdV = -\frac{dp}{\rho} = -\upsilon dp \tag{1}$$

の関係が得られるから，これを式(10.110)に代入すると

$$dh - \upsilon dp = 0 \tag{2}$$

となる。一方，エントロピー変化の式(10.16)と式(10.4)より

$$ds = \frac{dq}{T} = \frac{dh - \upsilon dp}{T} \tag{3}$$

となる。ゆえに，式(2)と(3)より

$ds = 0$，すなわち $s = \mathrm{const}$ となる。証明終わり。

［問題 10. 13］ 一次元管路において，断面①で静温 40℃，静圧 100 kN/m^2 の空気が速度 400 m/s の速さで等エントロピー的に流れている。断面②の静圧が 140 kN/m^2 として，断面②における速度を求めよ。次に，断面②の温度，および両断面におけるマッハ数を求めよ。

［解］ 式(10.41)を断面①と断面②に適用すると式(1)が得られ，この式を変形すると断面②での速度 V_2 は式(2)で求まる。

$$\frac{\kappa}{\kappa-1}RT_1 + \frac{{V_1}^2}{2} = \frac{\kappa}{\kappa-1}RT_2 + \frac{{V_2}^2}{2} \tag{1}$$

$$\frac{{V_2}^2 - {V_1}^2}{2} = \frac{\kappa}{\kappa-1}RT_1\left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right)$$

$$V_2 = \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa-1}RT_1\left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right) + {V_1}^2} \tag{2}$$

また，式(10.21)より

$$\frac{T_2}{T_1}=\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \tag{3}$$

の関係式が得られ，これを式(2)に代入すると

$$V_2=\sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa-1}RT_1\left\{1-\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}\right\}+V_1{}^2} \tag{4}$$

$$=\sqrt{\frac{2\times1.4}{1.4-1}\times287.03\times(273.15+40)\times\left\{1-(140/100)^{(1.4-1)/1.4}\right\}+400^2}=311.6\ \mathrm{m}\ /$$

となる。次に，温度 T_2 は，式(3)を変形して

$$T_2=T_1\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \tag{5}$$

となる。ゆえに

$$T_2=(273.15+40)\times\left(\frac{140}{100}\right)^{(1.4-1)/1.4}=344.8\ \ \mathrm{K}$$

断面①，②でのマッハ数 M_1，M_2 は，式(10.34)，(10.37)より

$$M_1=V_1/a_1=V_1/\sqrt{\kappa RT_1}=400/\sqrt{1.4\times287.1\times(273.2+40)}=1.13$$

$$M_2=V_2/a_2=V_2/\sqrt{\kappa RT_2}=310.6/\sqrt{1.4\times287.1\times344.8}=0.834$$

となる

［問題 10. 14］ よどみタンクに取り付けられた出口断面積 3.5 cm^2 の先細ノズルから，よどみ圧力 1 MPa，温度 70℃の空気が圧力 101.3 kPa の大気中に噴出している。ノズル出口での圧力，速度，および質量流量を求めよ。

［解］ 大気中の背圧 p_b(101.3 kPa)とよどみ圧力 p_0 の比 p_b/p_0 と式(10.67)より臨界圧力 p^*を求めると

$$p_b/p_0=101.3/(1\times10^3)=0.1013<\ p^*/p_0=0.528$$

$$p^*=0.528p_0=0.528\times1\times10^3=528\ \ \mathrm{k}\ \ \mathrm{P}$$

となる。 $p_b<p^*$ であるから，流れは，図 10.8 の曲線 c に示す不足膨張噴流となり，ノズル出口の圧力 p_e は，臨界圧力 p^*に等しくなることがわかる。

したがって

$$p_e = p^* = 528\ \mathrm{k\ P}$$

このときの速度 V_e と質量流量 m は，式(10.75)，(10.76)より，それぞれ次のように求まる。

$$a_0 = \sqrt{\kappa RT_0} = \sqrt{1.4 \times 287.03 \times (273.15 + 70)} = 371.3\ \mathrm{m\ /}$$

$$V_e{}^* = 0.913 a_0 = 0.913 \times 371.3 = 339.0\ \mathrm{m\ /}$$

$$m = 0.685 \frac{A_e p_0}{\sqrt{RT_0}} = 0.685 \times \frac{3.5 \times 10^{-4} \times 1 \times 10^6}{\sqrt{287.03 \times 343.15}} = 0.764\ \mathrm{k\ g}$$

［問題 10.15］（問題 10.14）において，よどみタンクの圧力が 150 kPa のとき，ノズル出口の圧力，速度，および質量流量を求めよ。また，流れがノズル出口でチョークするときのよどみ圧力を求めよ。

［解］ よどみ圧力 p_0=150 kPa に対する臨界圧力 p^*は，式(10.74)より

$$p^* = 0.528 p_0 = 0.528 \times 150 = 79.2\ \mathrm{k\ P}$$

となる。 $p_b > p^*$ であるから，流れは，チョークせず，図 10.8 の曲線 a に示す亜音速噴流となる。したがって，背圧と出口圧力は等しく， $p_e = p_b$ であるから，ノズルの出口圧力 p_e は

$$p_e = p_b = 101.3\ \mathrm{kPa}$$

となる。次に，質量流量 m は，式(10.73)より求まり，各記号にそれぞれの値を代入すると

$$m = \rho_e V_e A_e = \frac{A_e p_0}{\sqrt{RT_0}} \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa - 1}\left\{\left(\frac{p_e}{p_0}\right)^{2/\kappa} - \left(\frac{p_e}{p_0}\right)^{(\kappa+1)/\kappa}\right\}}$$

$$= \frac{3.5 \times 10^{-4} \times 1 \times 10^6}{\sqrt{287.03 \times 343.15}} \times \sqrt{\frac{2 \times 1.4}{1.4 - 1} \times \left\{\left(\frac{101.3}{150}\right)^{2/1.4} - \left(\frac{101.3}{150}\right)^{(1.4+1)/1.4}\right\}} = 0.725$$

となる。また，流れがノズル出口でチョークするときには，図 10.8 の曲線 b に示す音速噴流となり， $p_e = p_b = p^* = 101.3\ \mathrm{kPa}$ である。したがって，チョークするときのよどみ圧力 p_0 は，式(10.74)より次のように求まる。

$$p_0 = p_b / 0.528 = 101.3 / 0.528 = 191.9\ \mathrm{k\ P}$$

［問題 10.16］ 絶対圧力 1.013 MPa，温度 30℃の炭酸ガスが，よどみタンクに取り付けられた直径 20 mm のオリフィスから，大気圧 101.3 kPa の静止空気中に噴出している。炭酸ガスの比熱比 1.30，ガス定数 189 J/(kg･K)として，オリフィス出口での速度と質量流量を求めよ。

［解］ 式(10.74)を用いて，κ =1.30 の場合の p^*/p_0 を求めると

$$\frac{p^*}{p_0}=\left(\frac{2}{\kappa+1}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}=\left(\frac{2}{1.3+1}\right)^{\frac{1.3}{1.3-1}}=0.546$$

ゆえに，臨界圧力 p^*は

$$p^*=0.546p_0=0.546\times1013=553.1\ \mathrm{kP}$$

となり，$p^*>p_b=101.3\ \mathrm{kPa}$（大気圧）であることがわかる。したがって，出口圧力 $p_e=p^*$とすると，$p_e=p^*>p_b$であり，流れは出口でチョークし，不足膨張噴流となる。ここで，オリフィス出口での速度 V_eを求めるために，まず，出口での温度 T^*を求める式を導く。式(10.21)と (10.48)とから M =1 とおいて

$$\frac{T^*}{T_0}=\left(\frac{p^*}{p_0}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}=\frac{2}{\kappa+1}$$

となる。したがって

$$T^*=\frac{2}{\kappa+1}T_0=\frac{2}{1.3+1}\times(273.15+30)=263.6\ \mathrm{K}$$

となる。ゆえに，オリフィス出口の速度 $V_e{}^*$は $M=V_e{}^*/a^*=V_e{}^*/\sqrt{\kappa RT^*}=1$ より

$$V_e{}^*=\sqrt{\kappa RT^*}=\sqrt{1.3\times189\times263.6}=254.5\ \mathrm{m}\ /$$

となる。次に，出口の質量流量 m を求めるために，まず密度 ρ^*を式(10.1)より求めると

$$\rho^*=\frac{p^*}{RT^*}=\frac{553.1\times10^3}{189\times263.6}=11.1\ \mathrm{kg}\ /^3$$

となる。ゆえに，m は式(10.73)より

$$m=\rho^*V_e{}^*A=\rho^*V_e{}^*\left(\frac{\pi d^2}{4}\right)=11.1\times254.5\times\left(\frac{\pi\times20^2\times10^{-6}}{4}\right)=0.888\ \mathrm{kg}\ /$$

となる。

［問題 10.17］ 高速物体が時速 2500 km/h で静圧 65 kPa，温度 285 K の空気中を移動しており，物体前方において垂直衝撃波が発生している。空気中の音速，移動物体のマッハ数，および垂直衝撃波直後の圧力と温度を求めよ。

［解］ まず，空気中の音速 a，およびマッハ数 M は

$$a=\sqrt{\kappa RT}=\sqrt{1.4\times 287.03\times 285}=338.4\ \ \mathrm{m\ /}$$

$$M=V/a=2500\times 10^3/(338.4\times 3600)=2.05$$

となる。垂直衝撃波直後の圧力 p_2 と温度 T_2 は，それぞれ式(10.86)，(10.85)より求まり

$$p_2=\frac{2\kappa M_1{}^2-(\kappa-1)}{\kappa+1}p_1=\frac{2\times 1.4\times 2.05^2-(1.4-1)}{1.4+1}\times 65=307.9\ \ \mathrm{k\ P}$$

$$T_2=\frac{T_1\left\{2\kappa M_1{}^2-(\kappa-1)\right\}\left\{(\kappa-1)\ M_1{}^2+2\right\}}{(\kappa+1)^2 M_1{}^2}$$

$$=\frac{285\times\left\{2\times 1.4\times 2.05^2-(1.4-1)\right\}\times\left\{(1.4-1)\times 2.05^2+2\right\}}{(1.4+1)^2\times 2.05^2}=492.6\ \ \mathrm{K}$$

となる。

［問題 10.18］ 絶対圧力（よどみ圧力）1500 kPa，温度 45℃の空気が，よどみタンクに取り付けられたラバルノズルから，圧力 101.3 kPa，温度 15℃の大気中に噴出している。ラバルノズル内は等エントロピー流れで，スロート面積 10 cm^2 として，(a)スロートにおける温度，圧力，密度および音速，(b)質量流量，(c)出口におけるマッハ数，密度，(d)ラバルノズル出口の断面積を求めよ。

［解］(a) まず，よどみタンク内での密度 ρ_0，音速 a_0 は，式(10.1)の状態方程式および式(10.34)よりそれぞれ

$$\rho_0=p_0/RT_0=1500\times 10^3/\left\{287.03\times(273.15+45)\right\}=16.43\ \ \mathrm{k\ g\ /^3}$$

$$a_0=\sqrt{\kappa RT_0}=\sqrt{1.4\times 287.03\times(273.15+45)}=357.6\ \ \mathrm{m\ /}$$

となる。次に大気圧（背圧）p_b とよどみタンクの圧力 p_0 の比 p_b/p_0 を求めると

$$p_b / p_0 = 101.3/1500 = 0.0675 < p^* / p_0 = 0.528$$

となり， $p^* / p_0 = 0.528$より小さい。したがて，図 10.9 の圧力分布からわかるように, スロートで M=1 の臨界状態となる。ゆえに, スロートにおける温度 T^*, 圧力 p^*，密度 ρ^*および音速 a^*は，式(10.66)，(10.67)，(10.68)および(10.34)よりそれぞれ

$$T^* = 0.833 T_0 = 0.833 \times (273.15 + 45) = 265.0 \ \ \mathrm{K}$$

$$p^* = 0.528 \times p_0 = 0.528 \times 1500 = 792 \ \ \mathrm{k\ P}$$

$$\rho^* = 0.634 \times \rho_0 = 0.634 \times 16.43 = 10.42 \ \ \mathrm{k\ g\ /^3}$$

$$a^* = \sqrt{\kappa R T^*} = \sqrt{1.4 \times 287.03 \times 265.0} = 326.4 \ \ \mathrm{m\ /}$$

となる。

(b) スロートで臨界状態になっているので，質量流量 m は式(10.76)において，$A_e = A^*$として

$$m = 0.685 \frac{A^* p_0}{\sqrt{R T_0}} = 0.685 \times \frac{10 \times 10^{-4} \times 1500 \times 10^3}{\sqrt{287.03 \times (273.15 + 45)}} = 3.4 \ \ \mathrm{k\ g\ /}$$

となる。

(c) 出口におけるマッハ数 M と密度 ρ は，式(10.48)，(10.49)を変形して求まり

$$M = \sqrt{\frac{2}{\kappa - 1}\left\{\left(\frac{p_0}{p}\right)^{(\kappa-1)/\kappa} - 1\right\}} = \sqrt{\frac{2}{1.4 - 1} \times \left\{\left(\frac{1500}{101.3}\right)^{(1.4-1)/1.4} - 1\right\}} = 2.41$$

$$\rho = \rho_0 \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} M^2\right)^{\frac{-1}{\kappa - 1}} = 16.42 \times \left(1 + \frac{1.4 - 1}{2} \times 2.41^2\right)^{\frac{-1}{1.4-1}} = 2.39 \ \ \mathrm{k\ g\ /^3}$$

となる。

(d) ラバルノズルの出口の断面積 A は，式(10.70)より

$$A = \frac{A^*}{M}\left\{\frac{(\kappa - 1) M^2 + 2}{\kappa + 1}\right\}^{\frac{\kappa + 1}{2(\kappa - 1)}}$$

$$= \frac{10}{2.41} \times \left\{\frac{(1.4 - 1) \times 2.41^2 + 2}{1.4 + 1}\right\}^{\frac{1.4+1}{2 \times (1.4 - 1)}} = 24.20 \ \ \mathrm{cm^2}$$

となる。

［問題 10.19］ よどみタンクにおける絶対圧力 650 kPa，温度 400 K の空気が，スロート断面積 60 cm^2 のラバルノズルから噴出している。ラバルノズルの出口断面積は，スロート断面積の 2.4 倍であり，流れは等エントロピーとして，(a)ノズルのスロートで流れがチョークするときの最大の背圧，(b)背圧が 250 kPa のときの質量流量，(c)ノズルからの流れが超音速噴流になるまで，ノズル内での流れが膨張するときのノズル出口のマッハ数と圧力を求めよ。

［解］(a) ノズルのスロートで流れがチョークするときには，図 10.9 の曲線 b で示す流れとなるので，ラバルノズルの拡大部分では亜音速となる。題意より断面積比が $A/A^* = 2.4$ であり，これと κ =1. 4 を式(10.70)に代入して得られる式(1)より，亜音速の M が求まる。

$$\frac{A}{A^*} = \frac{1}{M}\left\{\frac{(\kappa-1)M^2+2}{\kappa+1}\right\}^{\frac{\kappa+1}{2(\kappa-1)}}$$

$$2.4 = \frac{1}{M}\left(\frac{0.4M^2+2}{2.4}\right)^3 \tag{1}$$

しかし，式(1)は M に関する 5 次の方程式で代数的には解けない。そこで，左辺が 2.4 になるように, 繰り返し試し算により M を求めるとよいが, 一般的には, 表 10.1 を用いて求める。表より，おおよそ M=0.25 を得る。そこで最大背圧を求めるために，式(10.48)の逆数をとった式にこの値を代入して

$$\frac{p}{p_0} = \left(1+\frac{\kappa-1}{2}M^2\right)^{\frac{-\kappa}{\kappa-1}} = \left(1+\frac{1.4-1}{2}\times 0.25^2\right)^{\frac{-1.4}{1.4-1}} = 0.957 \tag{2}$$

となる。したがって，最大背圧は， $p = p_b = 0.957p_0 = 0.957\times 650 = 622\ \ \mathrm{kPa}$ となり，流れは，この背圧以下のときに，スロートでチョークする。

(b) 題意より背圧 250 kPa＜622 kPa であるから，流れはスロートにおいてチョークするので，M=1 となる。そこで，式(10.47)，(10.48)の逆数をとった式に M=1 を代入すると，スロートにおける温度と圧力は，それぞれ

$$p = 0.528p_0 = 0.528\times 650 = 343.2\ \ \mathrm{kP}$$

$$T = 0.833T_0 = 0.833\times 400 = 333.2\ \ \mathrm{K}$$

となる。したがって, スロートにおける質量流量 $m = \rho AV$ は，$p = \rho RT$，$M = V/a$，

$a=\sqrt{\kappa RT}$ を用いて，次式より求まる。

$$m=\rho AV=\frac{pA\sqrt{\kappa RT}}{RT}=\frac{343.2\times10^{3}\times60\times10^{-4}\times\sqrt{1.4\times287.05\times333.2}}{287.05\times333.2}=7.88\ \mathrm{kg}$$

(c) 上式(1)において，左辺が 2.4 となるもう一つの M の繰り返し解は，M =2.4 となる。この値は，表 10.1 から求められる。この値を上式(2)に代入すると

$$\frac{p}{p_0}=\left(1+\frac{\kappa-1}{2}M^2\right)^{\frac{-\kappa}{\kappa-1}}=\left(1+\frac{1.4-1}{2}\times2.4^2\right)^{\frac{-1.4}{1.4-1}}=0.0684 \qquad (3)$$

となり，当然のことながら，これも表 10.1 に示されている値と一致している。したがって，ラバルノズルの出口の圧力は

$$p=0.0684p_0=0.0684\times650=44.46\ \mathrm{kP}$$

となる。

［問題 10.20］ よどみタンクでの圧力 450 kPa の空気が，ラバルノズルから噴出している。ノズルの出口断面積 100 cm^2，スロートの断面積 50 cm^2 であるとき，ノズル出口における圧力とマッハ数を，(a)亜音速流れの場合，(b)超音速流れの場合，について求めよ。

［解］ ノズルの出口とスロートの断面積比が $A_e/A^*=100/50=2$ であるから，式(10.71)にこの値と κ =1. 4 を代入するとノズル出口とよどみタンクの圧力比 p_e/p_0 が式(1)より求まる。

$$2=\left(\frac{\kappa-1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{2}{\kappa+1}\right)^{\frac{\kappa+1}{2(\kappa-1)}}\left\{1-\left(\frac{p_e}{p_0}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}\right\}^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{p_e}{p_0}\right)^{-\frac{1}{\kappa}} \qquad (1)$$

しかし，この場合も前問と同じように，一般には表 10.1 から求められ

$$\frac{p_e}{p_0}=0.9375,\ \text{あるいは}\ 0.0935 \qquad (2)$$

となる。

(a) 亜音速流れの場合には，図 10.9 の曲線 b の流れとなるから，式(2)において，出口圧力とよどみタンクの圧力比は，$p_e/p_0=0.9375$である。したがって，

出口圧力 p_e は

$$p_e = 0.9375 p_0 = 0.9375 \times 450 = 421.9 \ \mathrm{k \ P}$$

となり，ノズル出口のマッハ数 M_e は，式(10.48)を変形した次式より求まる。

$$M_e = \sqrt{\frac{2}{\kappa - 1}\left\{\left(\frac{p_0}{p_e}\right)^{(\kappa-1)/\kappa} - 1\right\}} = \sqrt{\frac{2}{1.4 - 1} \times \left\{\left(\frac{1}{0.9375}\right)^{(1.4-1)/1.4} - 1\right\}} = 0.305 \quad (3)$$

(b) 超音速流れの場合には，図 10.9 の曲線 f の流れとなるから，式(2)の p_e/p_0= 0.0935 より p_e は

$$p_e = 0.0935 p_0 = 0.0935 \times 450 = 42.08 \ \mathrm{k \ P}$$

となる。したがって，ノズル出口のマッハ数 M_e は，上式(3)と同じ計算式より求まり

$$M_e = \sqrt{\frac{2}{\kappa - 1}\left\{\left(\frac{p_0}{p_e}\right)^{(\kappa-1)/\kappa} - 1\right\}} = \sqrt{\frac{2}{1.4 - 1} \times \left\{\left(\frac{1}{0.0935}\right)^{(1.4-1)/1.4} - 1\right\}} = 2.20$$

となる。

［問題 10. 21］ 管内を超音速で流れている空気中に垂直衝撃波が発生している。垂直衝撃波の上流におけるマッハ数が 2.8，圧力が 130 kPa，温度が 285 K である。衝撃波の下流におけるマッハ数，圧力，温度，密度，および垂直衝撃波によって生じるエントロピーの変化量を求めよ。

［解］ マッハ数 M は，式(10.84)より

$$M_2 = \sqrt{\frac{2 + (\kappa - 1) M_1{}^2}{2\kappa M_1{}^2 - (\kappa - 1)}} = \sqrt{\frac{2 + (1.4 - 1) \times 2.8^2}{2 \times 1.4 \times 2.8^2 - (1.4 - 1)}} = 0.488$$

圧力 p_2 は，式(10.86)より

$$p_2 = p_1 \cdot \frac{2\kappa M_1{}^2 - (\kappa - 1)}{\kappa + 1} = 130 \times \frac{2 \times 1.4 \times 2.8^2 - (1.4 - 1)}{1.4 + 1} = 1167.4 \ \mathrm{k \ P}$$

温度 T_2 は，式(10.85)より

$$T_2 = \frac{T_1\left\{2\kappa M_1{}^2 - (\kappa-1)\right\}\left\{(\kappa-1)M_1{}^2 + 2\right\}}{(\kappa+1)^2 M_1{}^2}$$

$$= \frac{285\times\left\{2\times1.4\times2.8^2-(1.4-1)\right\}\left\{(1.4-1)\times2.8^2+2\right\}}{(1.4+1)^2\times2.8^2} = 698.6\ \ \mathrm{K}$$

密度 ρ_2 は，式(10.1)の状態方程式より

$$\rho_2 = \frac{p_2}{RT_2} = \frac{1167.4\times10^3}{287.03\times698.6} = 5.82\ \ \mathrm{kg/m^3}$$

エントロピーの変化は，式(10.88)より

$$\frac{s_2-s_1}{R} = \ln\left\{\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\kappa/(\kappa-1)}\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{-1}\right\} = \ln\left\{\left(\frac{698.6}{285}\right)^{1.4/(1.4-1)}\times\left(\frac{1167.4}{130}\right)^{-1}\right\} = 0.943$$

［問題 10.22］ 図 10.13 に示すように，一様な超音速流れの中に置かれたピトー管の前方には，離れ衝撃波が生じる。一様流れのマッハ数を 1.8，ピトー管で測定した全圧を 185 kPa として，衝撃波前方における一様流れの全圧と静圧を求めよ。

［解］ 衝撃波前方の全圧 p_{01} は，次に示す式(10.105)を用いて求める。

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \left\{\frac{(\kappa+1)M_1{}^2}{(\kappa-1)M_1{}^2+2}\right\}^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}\left\{\frac{\kappa+1}{2\kappa M_1{}^2-(\kappa-1)}\right\}^{\frac{1}{\kappa-1}} \tag{10.105}$$

$$\frac{185}{p_{01}} = \left\{\frac{(1.4+1)\times1.8^2}{(1.4-1)\times1.8^2+2}\right\}^{\frac{1.4}{1.4-1}}\times\left\{\frac{1.4+1}{2\times1.4\times1.8^2-(1.4-1)}\right\}^{\frac{1}{1.4-1}} = 0.8127$$

$$\therefore\quad p_{01} = 227.6\ \ \mathrm{kPa}$$

となる。衝撃波前方の静圧 p_1 は，式(10.48)の p，M に添字 1 を付けて求める。

$$\frac{227.6}{p_1} = \left(1+\frac{\kappa-1}{2}M_1{}^2\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} = \left(1+\frac{1.4-1}{2}\times1.8^2\right)^{\frac{1.4}{1.4-1}} = 5.75$$

$$\therefore\quad p_1 = 39.58\ \ \mathrm{kPa}$$

［問題 10. 23］図 10.16 に示すように，一次元等エントロピー流れの亜音速の圧縮性流体中に置かれた全圧ピトー管で，速度を求める式は

$$V = \varepsilon\sqrt{\frac{2(p_0 - p)}{\rho}}$$

で，表されることを証明せよ。 ε は圧縮の影響を表す修正係数である。この場合には，超音速流れではないので，ピトー管前方には衝撃波は生じない。

また, 実際に, 温度 285 K の空気の流れをピトー管で測定して, 全圧 180 kPa, 静圧 115 kPa を得た。この場合の速度を求めよ。

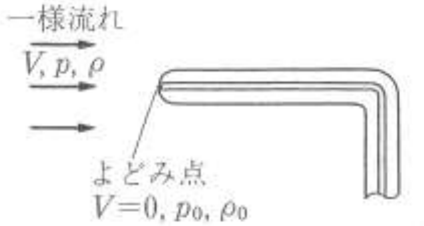

図 10.16

［解］等エントロピー流れであるから，前方静圧 p とよどみ点の圧力（全圧）p_0 の間には，式(10.48)に示した関係がある。

$$\frac{p_0}{p} = \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2}M^2\right)^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}} \tag{10.48}$$

上式の右辺を級数展開すると

$$\frac{p_0}{p} = 1 + \frac{\kappa}{2}M^2 + \frac{\kappa}{8}M^4 + \frac{\kappa(2-\kappa)}{48}M^6 + \cdot\cdot\cdot \tag{1}$$

となり，上式を次のように整理する。

$$p_0 - p = \frac{\kappa p M^2}{2}\left(1 + \frac{1}{4}M^2 + \frac{2-\kappa}{24}M^4 + \cdot\cdot\cdot\right) \tag{2}$$

ここで，式(10.34)の $a = \sqrt{\kappa p/\rho}$ および(10.37)の $M = V/a$ の関係より

$$\frac{\kappa p M^2}{2} = \frac{\kappa p}{2}\frac{\rho}{\kappa p}V^2 = \frac{1}{2}\rho V^2 \tag{3}$$

となる。式(3)を式(2)に代入して

$$p_0 - p = \frac{1}{2}\rho V^2\left(1+\frac{1}{4}M^2+\frac{2-\kappa}{24}M^4+\cdot\cdot\cdot\right) \tag{10.111}$$

となる。ここで

$$\varepsilon = \left(1+\frac{1}{4}M^2+\frac{2-\kappa}{24}M^4+\cdot\cdot\cdot\right)^{-1/2} \tag{10.112}$$

とおく。ε は圧縮の影響を表す**修正係数**(coefficient of correction)である。ゆえに，式(10.109)は

$$p_0 - p = \varepsilon^{-2}\cdot\frac{1}{2}\rho V^2$$

となる。したがって，速度 V は

$$V = \varepsilon\sqrt{\frac{2}{\rho}(p_0 - p)} \tag{10.113}$$

が導ける。証明終わり。

次に，速度を求める。まず，密度 ρ は

$$\rho = \frac{p}{RT} = \frac{115\times10^3}{287.03\times285} = 1.406\ \mathrm{kg}/^3$$

この状態におけるマッハ数 M は，式(10.48)より

$$M = \left[\frac{2}{\kappa-1}\left\{\left(\frac{p_0}{p}\right)^{(\kappa-1)/\kappa}-1\right\}\right]^{1/2} = \left[\frac{2}{1.4-1}\times\left\{\left(\frac{180}{115}\right)^{(1.4-1)/1.4}-1\right\}\right]^{1/2} = 0.826$$

修正係数 ε は

$$\varepsilon = \left(1+\frac{1}{4}\times0.826^2+\frac{2-1.4}{24}\times0.826^4+\cdot\cdot\cdot\right)^{\frac{-1}{2}} = 0.9197$$

したがって，速度 V は，式(10.113)より

$$V = \varepsilon\sqrt{\frac{2}{\rho}(p_0 - p)} = 0.9197\times\sqrt{\frac{2}{1.406}\times(180-115)\times10^3} = 279.7\ \mathrm{m}\ /$$

となる。

［問題 10.24］ 図 10.12(b)に示すように，空気が壁面に沿って超音速で流れており，壁面の角部から斜め衝撃波が発生している。斜め衝撃波前方の流れのマッハ数は 2.2，圧力は 101.3 kPa，温度は 15 ℃である。流れが斜め衝撃波を通過した後方の流れのマッハ数，密度，圧力を求めよ。ただし，偏角 θ =10° とする。

［解］ 式(10.104)より，偏角 θ =10° ，M_1=2.2 として，衝撃波角 β を求める。

$$\tan\theta = \frac{2\cot\beta\ (M_1{}^2\sin^2\beta - 1)}{M_1{}^2\,(\kappa + \cos 2\beta) + 2}$$

$$0.17632 = \frac{2\cot\beta\ (2.2^2 \times \sin^2\beta - 1)}{2.2^2 \times (1.4 + \cos 2\beta) + 2} = \frac{2\cot\beta\ (4.84 \times \sin^2\beta - 1)}{8.776 + 4.84 \times \cos 2\beta}$$

β を仮定して右辺に代入し，左辺の値に等しくなるまで繰り返し計算を行うと

$$\beta = 35.79°$$

となる。斜め衝撃波後方のマッハ数 M_2 は式(10.100)を変形した次式より求まる。

$$M_2 = \sqrt{\frac{2 + (\kappa - 1) M_1{}^2 \sin^2\beta}{2\kappa M_1{}^2 \sin^2\beta - (\kappa - 1)}} \times \frac{1}{\sin(\beta - \theta)}$$

$$= \sqrt{\frac{2 + (1.4 - 1) \times 2.2^2 \times \sin^2 35.79}{2 \times 1.4 \times 2.2^2 \times \sin^2 35.79 - (1.4 - 1)}} \times \frac{1}{\sin(35.79 - 10)} = 1.82$$

衝撃波前後の密度比 ρ_2 / ρ_1 は，式(10.103)より

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\kappa + 1)\, M_1{}^2 \sin^2\beta}{(\kappa - 1)\, M_1{}^2 \sin^2\beta + 2} = \frac{(1.4 + 1) \times 2.2^2 \times \sin^2 35.79}{(1.4 - 1) \times 2.2^2 \times \sin^2 35.79 + 2} = 1.492$$

となる。ゆえに，密度 ρ_2 は

$$\rho_2 = 1.492 \times \rho_1 = 1.492 \times \frac{p}{RT_1} = 1.492 \times \frac{101.3 \times 10^3}{287.03 \times (273.15 + 15)} = 1.83\ \mathrm{kg/m^3}$$

同じく圧力比 p_2 / p_1 は，式(10.102)より

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2\kappa M_1{}^2 \sin^2\beta - (\kappa - 1)}{\kappa + 1} = \frac{2 \times 1.4 \times 2.2^2 \times \sin^2 35.79 - (1.4 - 1)}{1.4 + 1} = 1.765$$

となり，圧力 p_2 は

$$p_2 = 1.765 \times p_1 = 1.765 \times 101.3 \times 10^3 = 178.8 \times 10^3\ \mathrm{Pa} = 178.8\ \mathrm{kPa}$$

となる。