

10.3 衝撃波

衝撃波 (shock wave) は、ラバルノズル内や超音速流中に置かれた物体まわり、さらに爆発現象などのように、流体中のエネルギー変化が急激に変化した場合に生じる。衝撃波の厚さは非常に薄く、この層の中では、圧力、温度、密度などの状態量が不連続的に急激に変化し、不可逆変化となる。工学的には、衝撃波内部の詳細な構造よりも、衝撃波前後での流れの圧力、速度、密度や温度などの状態量の関係が重要であるので、これらの関係を調べてみよう。

10.3.1 垂直衝撃波

衝撃波の波面が流線に対して垂直なものを、**垂直衝撃波** (normal shock wave) という。ここでは、垂直衝撃波前後の状態量の変化について調べてみよう。

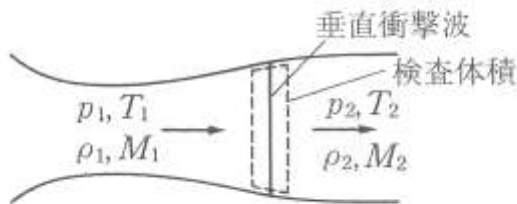


図 10.11 垂直衝撃波の検査体積

(1) 垂直衝撃波の基礎式

図 10.11 に示すように、垂直衝撃波を囲む検査体積をとると、垂直衝撃波前後の流れには、次の基礎式が成立する。

$$\text{連続の式: } \rho_1 V_1 = \rho_2 V_2 \quad (10.77)$$

$$\text{運動量の式: } p_1 + \rho_1 V_1^2 = p_2 + \rho_2 V_2^2 \quad (10.78)$$

$$\text{エネルギーの式: } \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{1}{2} V_1^2 = \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{1}{2} V_2^2 = \frac{\kappa+1}{2(\kappa-1)} a^*{}^2 \quad (10.79)$$

(2) プラントルの式

式(10.77), (10.78), (10.79)を用いて整理すると

$$V_1 V_2 = a^{*2} \quad (10.80)$$

が得られる。すなわち、垂直衝撃波前後の速度の積は一定であり、臨界音速の2乗に等しい。この式を**プラントルの式** (Prandtl's equation) という。なお、圧縮性の流れにおいては、マッハ数 $M=V/a$ は重要な無次元数であるが、臨界状態の臨界マッハ数を M^* 、音速を a^* として

$$M^* = \frac{V}{a^*} \quad (10.81)$$

を用いると便利な場合がある。いま、この臨界マッハ数を用いると、式(10.80)は

$$M_1^* M_2^* = 1 \quad (10.82)$$

となる。この式は、衝撃波の上流が亜音速流のときには、下流は超音速流であり、また、上流が超音速流のときには、下流は亜音速流であることを意味している。なお、臨界マッハ数 M^* と M との関係は

$$M^{*2} = \frac{(\kappa+1)M^2}{2+(\kappa-1)M^2} \quad (10.83)$$

となる。

(3) 垂直衝撃波に関する式

垂直衝撃波前後の状態量を求めるには、衝撃波上流のマッハ数 M_1 の関数で表すのが実用上便利である。衝撃波前後のマッハ数、温度比、圧力比、および密度比の関係はそれぞれ次のように表される。

マッハ数 M_2 は、式(10.83)を(10.82)に代入して整理すると

$$M_2^2 = \frac{2+(\kappa-1)M_1^2}{2\kappa M_1^2 - (\kappa-1)} \quad (10.84)$$

となる。温度比 T_2/T_1 は、式(10.47)を展開した式

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{(\kappa-1)M_1^2 + 2}{(\kappa-1)M_2^2 + 2}$$

に式(10.84)の M_2 を代入して整理すると

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{\{2\kappa M_1^2 - (\kappa - 1)\} \{(\kappa - 1) M_1^2 + 2\}}{(\kappa + 1)^2 M_1^2} \quad (10.85)$$

となる。圧力比 p_2/p_1 は、式(10.78)の V^2 に式(10.34), (10.37)から得られる $V = M\sqrt{\kappa p/\rho}$ を代入して得られた次の式

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{1 + \kappa M_1^2}{1 + \kappa M_2^2}$$

に、式(10.84)の M_2 を代入して整理すると

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2\kappa M_1^2 - (\kappa - 1)}{\kappa + 1} \quad (10.86)$$

となる。さらに、衝撃波前後の密度比 ρ_2/ρ_1 は、状態方程式(10.1)より得られる $\rho_2/\rho_1 = (p_2/p_1)(T_1/T_2)$ に式(10.85)と(10.86)を代入して

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{V_1}{V_2} = \frac{(\kappa + 1)M_1^2}{(\kappa - 1)M_1^2 + 2} \quad (10.87)$$

となる。衝撃波が生じているときには、 $p_2/p_1 > 1$ であるから、式(10.86)において、 $M_1 > 1$ となる。また、式(10.84)において、 $M_1 > 1$ の場合には、 $M_2 < 1$ となる。これらのことから、 $M > 1$ の超音速流が垂直衝撃波を通過すると、亜音速に減じることがわかる。

次に、衝撃波によるエントロピー変化 $s_2 - s_1$ は、式(10.20)より

$$\frac{s_2 - s_1}{R} = \ln \left\{ \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{\kappa/(\kappa-1)} \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{-1} \right\} \quad (10.88)$$

となる。この式(10.88)に $T_2/T_1 = (p_2/p_1)(\rho_1/\rho_2)$ の関係を代入すると

$$\frac{s_2 - s_1}{R} = \ln \left\{ \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} \right)^{\kappa/(\kappa-1)} \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{1/(\kappa-1)} \right\} \quad (10.89)$$

となる。さらに、衝撃波によるエントロピー変化 $s_2 - s_1$ を M_1 で表すには、式(10.89)に式(10.86), (10.87)を代入すると、

$$\frac{s_2 - s_1}{R} = \frac{\kappa}{\kappa - 1} \ln \left\{ \frac{(\kappa - 1)M_1^2 + 2}{(\kappa + 1)M_1^2} \right\} + \frac{1}{\kappa - 1} \ln \left\{ \frac{2\kappa M_1^2 - (\kappa - 1)}{\kappa + 1} \right\} \quad (10.90)$$

となる。

(4) ランキン・ユゴニオの式

衝撃波前後の状態量の変化は、次の式からも求められる。式(10.86), (10.87)より

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{p_2 + \frac{\kappa-1}{\kappa+1} p_1}{\kappa+1}}{\frac{\kappa-1}{\kappa+1} \frac{p_2}{p_1} + 1} \quad (10.91)$$

この式は、衝撃波前後の圧力比と密度比を表す重要な式で、**ランキン・ユゴニオの式** (Rankine-Hugoniot equation) という。

10.3.2 斜め衝撃波

図 10.12(a)～(c)に示すように、超音速流の中にくさび形状や鈍頭形状の物体が置かれたり、あるいは超音速流が凹壁面を通過するときには、流れに傾斜した衝撃波が発生する。このような衝撃波を**斜め衝撃波** (oblique shock wave) という。特に、くさびの半頂角 θ が小さいときには、先端に付着した**弱い衝撃波** (weak shock wave) が生じる。このような衝撃波を**付着衝撃波** (attached shock wave) という。半頂角 θ が大きくなり、図(c)のような鈍頭物体では、先端から離れた**強い衝撃波** (strong shock wave) の**離脱衝撃波** (detached shock wave) が発生する。弓形の形状をしている場合には、**弓形離れ衝撃波** (detached bow shock wave) あるいは**わん曲衝撃波** (bow shock wave) という。ここでは、斜め衝撃波前後の状態量の関係を調べてみよう。それぞれの速度および角度は、図 10.12(d)の流れの関係に示すとおりである。

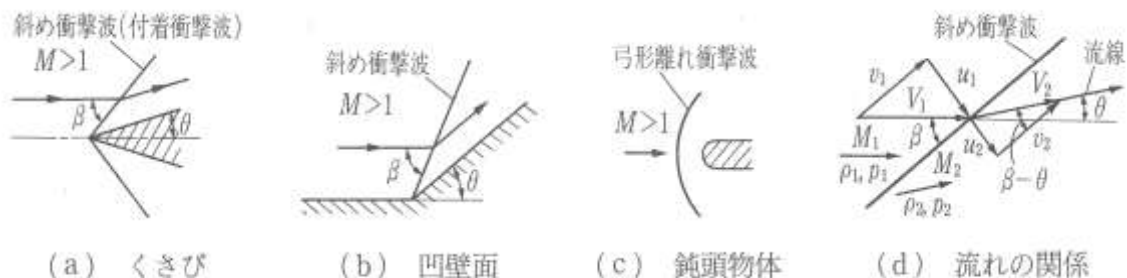


図 10.12 斜め衝撃波と衝撃波前後の流れの関係

$$\text{連続の式: } \rho_1 u_1 = \rho_2 u_2 \quad (10.92)$$

$$\text{波面に垂直な運動量の式: } p_1 + \rho_1 u_1^2 = p_2 + \rho_2 u_2^2 \quad (10.93)$$

$$\text{波面に平行な運動量の式: } \rho_1 u_1 v_1 = \rho_2 u_2 v_2 \quad (10.94)$$

式(10.92)を用いると

$$v_1 = v_2 \quad (10.95)$$

となり, 斜め衝撃波の波面に平行な方向には, 変化はないことがわかる。

$$\text{エネルギーの式は } \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{1}{2} V_1^2 = \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{1}{2} V_2^2 \quad (10.96)$$

であり, 速度線図より $V_1^2 = u_1^2 + v_1^2$, $V_2^2 = u_2^2 + v_2^2$ の関係があるから, これらを上式に代入すると

$$\text{エネルギーの式は } \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{1}{2} u_1^2 = \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{1}{2} u_2^2 \quad (10.97)$$

となる。これらの式より, 斜め衝撃波に垂直な流れの成分をとると, 垂直衝撃波の基礎式(10.77)~(10.79)をそのまま適用できる。図 10.12(d)より

$$u_1 = V_1 \sin \beta, \quad u_2 = V_2 \sin(\beta - \theta) \quad (10.98)$$

斜め衝撃波に垂直な成分の衝撃波の波面前後のマッハ数を, それぞれ M_{u1} , M_{u2} とすると, 上式より

$$u_1/a_1 = M_{u1} = M_1 \sin \beta, \quad u_2/a_2 = M_{u2} = M_2 \sin(\beta - \theta) \quad (10.99)$$

となる。この式の M_{u1} , M_{u2} を垂直衝撃波の基礎式における M_1 , M_2 と置き換え, 垂直衝撃波に関する式(10.84)~(10.87)に適用すると, 斜め衝撃波前後のマッハ数, 温度比, 圧力比, および密度比の関係は, それぞれ次のように衝撃波前のマッハ数 M_1 で表される。

$$M_2^2 \sin^2(\beta - \theta) = \frac{2 + (\kappa - 1) M_1^2 \sin^2 \beta}{2\kappa M_1^2 \sin^2 \beta - (\kappa - 1)} \quad (10.100)$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{\{2\kappa M_1^2 \sin^2 \beta - (\kappa - 1)\} \{(\kappa - 1) M_1^2 \sin^2 \beta + 2\}}{(\kappa + 1)^2 M_1^2 \sin^2 \beta} \quad (10.101)$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2\kappa M_1^2 \sin^2 \beta - (\kappa - 1)}{\kappa + 1} \quad (10.102)$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\kappa+1) M_1^2 \sin^2 \beta}{(\kappa-1) M_1^2 \sin^2 \beta + 2} \quad (10.103)$$

なお、ここで角度 β は**衝撃波角**(shock angle), θ は**偏角**(deflection angle)とよばれるもので、 β と θ との間には

$$\tan \theta = \frac{2 \cot \beta (M_1^2 \sin^2 \beta - 1)}{M_1^2 (\kappa + \cot^2 \beta) + 2} \quad (10.104)$$

の関係式が成立つ。この式は、衝撃波直前のマッハ数 M_1 をパラメータとする衝撃波角 β と偏角 θ との関係を示す重要な式である。

10.3.3 離脱衝撃波

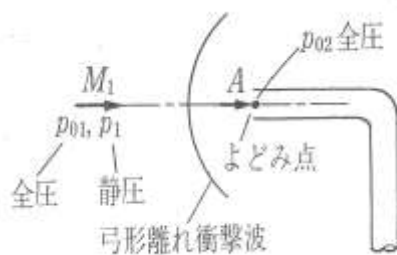


図 10.13 超音速噴流中におかれた全圧ピトー管

図 10.13 に示すように、超音速噴流中に置かれたピトー管によってマッハ数の測定をする場合、その先端には弓形離れ衝撃波が生じる。ピトー管の前面においては、衝撃波が垂直であると考えてよい。衝撃波前の超音速流は、この垂直衝撃波を通過して亜音速流となり、断熱で等エントロピー流れが成り立つとする。ピトー管の先端の点 A では、よどみ圧力 (全圧) p_{02} となり、衝撃波前方のマッハ数を M_1 , 全圧を p_{01} , 静圧を p_1 とすると、よどみ圧力 p_{02} , マッハ数 M_1 , および全圧 p_{01} との間には、次の式が成立する。

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \left\{ \frac{(\kappa+1)M_1^2}{(\kappa-1)M_1^2 + 2} \right\}^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \left\{ \frac{\kappa+1}{2\kappa M_1^2 - (\kappa-1)} \right\}^{\frac{1}{\kappa-1}} \quad (10.105)$$

この式より、 M_1 と p_{02} が既知であると、真のよどみ圧力 p_{01} が求められる。また、 $M > 1$ のときには、 $p_{02} < p_{01}$ となり、流れの全圧は、垂直衝撃波によって減

少することがわかる。なお、衝撃波前方のよどみタンクの状態がわからないときには、例えば、等エントロピー流れでない場合や、飛行機などで全圧 p_{02} を測定する場合には、一様流れの前方静圧 p_1 が既知であれば、次の式から、マッハ数 M_1 を求めることができる。式(10.105)と(10.48)より

$$\frac{p_{02}}{p_1} = \frac{p_{02}}{p_{01}} \frac{p_{01}}{p_1} = \left\{ \frac{(\kappa+1)M_1^2}{2} \right\}^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \left\{ \frac{\kappa+1}{2\kappa M_1^2 - (\kappa-1)} \right\}^{\frac{1}{\kappa-1}} \quad (10.106)$$

上式を、**レイリーのピトー管公式** (Reyleigh pitot-tube formula) いい、 p_1 と p_{02} を測定することによって、超音速流のマッハ数 M_1 を求めることができる。

10.1 圧縮波と膨張波

衝撃波の強さが小さい極限の場合としての、圧縮波と膨張波の簡単な性質について調べてみよう。

10.4.1 圧縮波

図 10.14(a)に示すように、一様な超音速流がゆるやかに曲がる凹壁面に沿って流れている場合を考える。

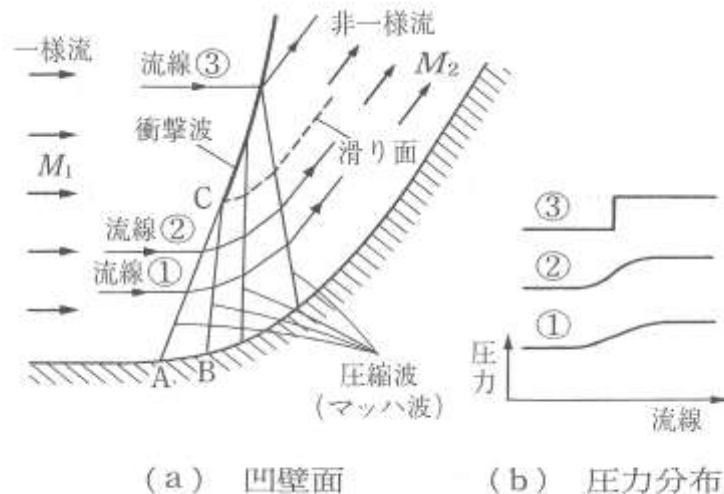


図 10.14 緩やかに曲がる凹壁面を過ぎる超音速流

図に示すように、凹壁面より無数の**マッハ波** (Mach wave) が生じるが、このマッハ波を**圧縮波** (compression wave) とよぶ。圧縮波は上方で集合して、交点をもつことになる。たとえば、図の点 A, B で発生した圧縮波は、点 C で集合する。点 C より上方では、このような圧縮波が次々に集合して**衝撃波**が形成される。図(b)に示すように、流線①, ②, ③上の圧力は、流線①, ②では連続的に増加しているが、流線③では不連続的に増加している。すなわち、圧縮波を通過した流れの圧力は、増加することになる。点 C と凹壁面との間の流れでは、エントロピーは変化しないが、**衝撃波**を通過する流れでは、エントロピーは増加する。したがって、点 C を通過する流線は、この点の前後でエントロピーが異なることになる。この面を**すべり面** (slip surface) といい、この面では速度差を生じる。

10.4.2 膨張波

図 10.15 に凸壁面を過ぎる超音速流の流れのようすを示す。角部の A 点より無数の弱い**膨張波** (expansion wave) が発生しており、流れは膨張波の発生している部分で少しずつ方向を変え、圧力や密度は、低下していく。このような流れを**プラントル・マイヤー流れ** (Prandtl-Meyer flow)、膨張波を**有心膨張波** (centered expansion) あるいは**プラントル・マイヤー膨張扇** (Prandtl-Meyer expansion fan) という。

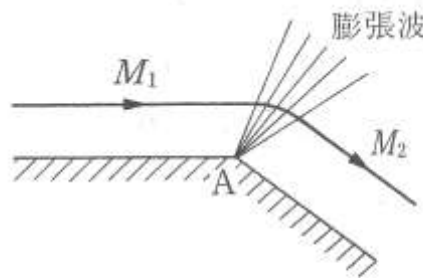


図 10.15 凸壁面を過ぎる
超音速流