基礎と演習　圧縮性流体の力学

第 10 章　圧縮性流体の流れ

はじめに

第 10 章　圧縮性流体の流れ

は　じ　め　に

一般的に，水や低速の気体の流れ（マッハ数 0.3 以下）は，非圧縮性流れとして取り扱ってよい。高速の気体の流れでは，運動エネルギーが大きく，温度や密度が著しく変化するので，圧縮性流れとして取り扱う必要がある。このような圧縮性流れは，航空機や高速で移動する物体まわりの流れ，さらに高速回転するターボ機械の内部の流れや高圧気体の管路内での膨張する流れなどに見られる。本章においては，このような圧縮性流体の流れや衝撃波などの現象について，その基本的な事項を述べる。

10.1　圧縮性流体の基礎

10.1.1　気体の熱力学

（１）気体の状態方程式

第 1 章の気体の性質で述べたように，**完全気体**（perfect gas）あるいは**理想気体**（ideal gas）においては，気体の圧力 p（Pa），密度 ρ (kg/m^3)，絶対温度 T（K）（以下単に温度と書く）の間に，完全気体の**状態方程式**（equation of state）といわれる次に示す関係式が成り立つ。

$$p=\rho RT \quad \text{あるいは} \quad pv=RT \tag{10.1}$$

ここで R（J/(kg･K)）は**ガス定数**（gas constant），v（m^3/kg）は $v=1/\rho$ で単位質量の気体の占める体積，すなわち**比体積**（specific volume）である。なお，温度 293.15K(20℃)の乾き空気では, ガス定数 R=287.03 J/(kg･K)である（表 1.7 参照）。

（２）熱力学第１法則

図 10.1 に示すように，ある閉じられた単位質量の気体を考える。この単位質量の気体に，外部から熱量 dq（J/kg）が加えられると，気体の内部エネルギーは de（J/kg）だけ増加し，同時に外部に対して dw の仕事，すなわち気体の膨張による仕事を行う。この関係は，**熱力学の第 1 法則**より

$$dq=de+dw=de+pd\left(\frac{1}{\rho}\right)=de+pdv \tag{10.2}$$

と表される。

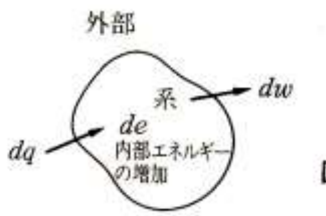

図 10.1　熱力学の第 1 法則

（３）内部エネルギーとエンタルピー

単位質量の**エンタルピー**（enthalpy）h（J/kg）は，次式

$$h = e + \frac{p}{\rho} = e + pv \tag{10.3}$$

で定義される。ここで，e は内部エネルギーであり，pv は気体を流動させるためのエネルギー（仕事）である。いま,式(10.3)を微分すると, $dh = de + pd(1/\rho) + (1/\rho)dp$ となるから，この関係式を用いて，式(10.2)の内部エネルギーde をエンタルピーdh で置き換えると，式(10.2)の熱量 dq は

$$dq = dh - \frac{1}{\rho}dp = dh - v\,dp \tag{10.4}$$

と表される。

（４）比熱および比熱比

単位質量の物質の温度を 1 K だけ上げるのに必要な熱量を**比熱**（specific heat）という。単位質量の物質に外部から dq の熱量を加えたときの物質の温度上昇を dT とすると

$$c = \frac{dq}{dT} \tag{10.5}$$

と表される。比熱 c の単位は，J/(kg･K)である。気体の場合には，次に示す**定容比熱** c_v（J/(kg･K)）と**定圧比熱** c_p（J/(kg･K)）が使用される。

$$c_v = \left(\frac{dq}{dT}\right)_{v=一定} \quad , \quad c_p = \left(\frac{dq}{dT}\right)_{p=一定} \tag{10.6}$$

式(10.2)，(10.4)において，それぞれ dv=0，dp=0 とすると，dq=de，dq=dh となるから

$$de = c_v dT \tag{10.7}$$

$$dh = c_p dT \tag{10.8}$$

したがって

$$e = c_v T \tag{10.9}$$

$$h = c_p T \tag{10.10}$$

となる。定圧比熱と定容比熱との比を κ とすると

$$\kappa = \frac{c_p}{c_v} \tag{10.11}$$

となる。この κ を**比熱比**（specific heat ratio）といい，圧縮性流体の流れでは重要な値である。温度 293.15K の乾き空気の比熱比は κ =1.4 である（表 1.7 参照）。式(10.3)のエンタルピーの式より

$$\frac{dh}{dT} = \frac{de}{dT} + \frac{d(p/\rho)}{dT}$$

であるから，この式に式(10.1)と式(10.7)，(10.8)を代入すると

$$c_p = c_v + R \tag{10.12}$$

となる。式(10.11)と(10.12)より

$$c_v = \frac{1}{\kappa - 1} R\,, \qquad c_p = \frac{\kappa}{\kappa - 1} R \tag{10.13}$$

が得られる。なお，内部エネルギーe とエンタルピーh は，式(10.13)を式(10.9)，(10.10)に代入すると

$$e = \frac{1}{\kappa - 1} RT = \frac{1}{\kappa - 1} \frac{p}{\rho} \tag{10.14}$$

$$h = \frac{\kappa}{\kappa - 1} RT = \frac{\kappa}{\kappa - 1} \frac{p}{\rho} \tag{10.15}$$

となる。

（５）熱力学の第２法則とエントロピー

図 10.1 に示すような，ある閉じられた系の外部の温度が系の内部の温度よりも高い場合には，**熱力学の第２法則**により熱は温度の高い外部から温度の低い系の内部に流れ，系の内部は別の状態量となる。別の状態量となった系は，最初の状態の系に戻ることはできず，**不可逆変化**（irreversible change）となる。この不可逆変化の程度を表すのが，**エントロピー**（entropy）と呼ばれるものである。これに対して，状態量が極めてゆるやかに変化して，元の状態に戻る場合を**可逆変化**（reversible change）という。気体の単位質量のエントロピーを s ｛J/(kg･K)｝とすると，エントロピーの変化 ds は

$$ds = \frac{dq}{T} \tag{10.16}$$

で定義される。式(10.2)，(10.4)および式(10.7)，(10.8)より

$$ds = c_v \frac{dT}{T} - R\frac{d\rho}{\rho} \tag{10.17}$$

$$ds = c_p \frac{dT}{T} - R\frac{dp}{p} \tag{10.18}$$

となる。系がある状態（s_0, p_0, ρ_0, T_0）から別の状態（s, p, ρ, T）に状態変化する場合のエントロピーの変化は，上式を積分して，式(10.13)を用いると

$$s - s_0 = c_v \ln\frac{T}{T_0} - R\ln\frac{\rho}{\rho_0} = R\ln\left\{\left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{1}{\kappa-1}}\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{-1}\right\} \tag{10.19}$$

$$s - s_0 = c_p \ln\frac{T}{T_0} - R\ln\frac{p}{p_0} = R\ln\left\{\left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}\left(\frac{p}{p_0}\right)^{-1}\right\} \tag{10.20}$$

となる。なお，系の外部との間に熱の出入りがなく，dq=0 の場合には，ds=0 となる。このように，ds=0 の状態で気体の状態量が変化することを**等エントロピー変化**（isentropic change）という。等エントロピー変化では，式(10.19), (10.20) において s=s_0 であるから

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{1}{\kappa-1}}, \qquad \frac{p}{p_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \tag{10.21}$$

が得られる。これらの式より

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\kappa} \tag{10.22}$$

となる。式(10.21)，(10.22)を完全気体の圧力，温度，密度の間の**等エントロピー関係式**（isentropic relation）という。断熱でかつ可逆な変化では，エントロピーは一定に保たれる。圧縮性流れでは，等エントロピー変化の仮定が実際の流れに十分よい近似で適用でき重要である。等エントロピーの関係式は，一般には

$$pv^{\kappa} = \mathrm{c\ o\ r}, \qquad \frac{p}{\rho^{\kappa}} = \mathrm{const} \tag{10.23}$$

あるいは

$$Tv^{\kappa-1} = \mathrm{c\ o\ r}, \qquad \frac{T}{\rho^{\kappa-1}} = \mathrm{const} \tag{10.24}$$

と表される。

10.1.2　気体の圧縮性

第 1 章の流体の圧縮性で述べたように，流体に作用する圧力が増大すると流体は圧縮され，密度変化を伴ってその体積は減少する。このような流体の性質を**圧縮性**（compressibility）といい，気体の場合には，体積変化や密度変化は特に著しい。いま，完全気体の圧縮が等エントロピー的に行れる場合を考え，等エントロピーの関係式(10.23)を対数微分すると

$$\frac{dp}{d\rho} - \kappa \frac{d\rho}{\rho} = 0 \tag{10.25}$$

$$\therefore \quad \frac{d\rho}{dp} = \frac{1}{\kappa}\frac{\rho}{p} \tag{10.26}$$

となる。したがって，等エントロピー変化における完全気体の**等エントロピー圧縮率**（isentropic compressibility）β_sは，式(1.12)を参照して式(10.26)を用いると

$$\beta_s = -\frac{1}{V}\frac{dV}{dp} = -\frac{1}{\upsilon}\frac{d\upsilon}{dp} = \frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dp} = \frac{1}{\kappa p} \tag{10.27}$$

となり，β_sは低圧では大きく，高圧では小さく表れる。すなわち，低圧の気体ほど圧縮しやすく，高圧の気体ほど圧縮しにくいことがわかる。また，等エントロピー圧縮率β_sの逆数，すなわち，完全気体の**等エントロピー体積弾性係数**（isentropic bulk modulus）K_sは，式(1.13)，(1.14)と式(10.27)より

$$K_s = \frac{1}{\beta_s} = \rho\frac{dp}{d\rho} = \kappa p \tag{10.28}$$

となる。

10.1.3　微小な圧力変動の伝ぱと音速

音は空気中を縦波として伝わることから，音を**音波**（sound wave）ともいう。音波の通過による圧力変動は十分に小さく，また大気圧に比べて極めて小さい。このような十分に小さい圧力変動を**微小じょう乱**（infinitesimal disturbance），それが伝わる速度を**音速**（sonic velocity, あるいは acoustic velocity）という。

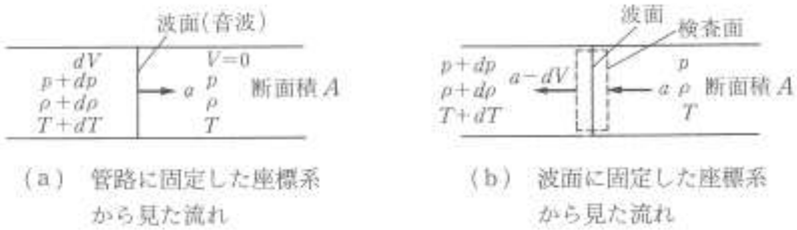

図 10.2　音波の伝ぱ

図 10.2(a)に示すように，一定断面積 A の管内の静止流体中を微小な圧力変動が伝わる場合を考える。微小な圧力変動，すなわち微小じょう乱の波面は速度 a，つまり音速 a で流体中を伝ぱしていく。波面の通過直前の流体の圧力を p，密度を ρ，温度を T とする。波面の通過後,速度は dV，圧力は dp，密度は $d\rho$，温度は dT だけ変化すると考える。この場合，流れは波面の通過によってその状態が変化し，時間の変化とともに変わる流れ，すなわち非定常流れとなる。そこで，問題を容易に理解するために，波面に固定した座標系を考える。つまり，波面と同じ速度 a で移動する観測者から 見ると，図 10.2(b)に示すように，波面は静止し，流れは時間的に変化しない流れ，すなわち定常流れと見なすことができる。いま，図に示すような検査面を考え，ここにおいて質量保存則を適用する。検査面に流入する質量と流出する質量は等しいので

$$\rho aA = (\rho + d\rho)(a - dV)A \qquad (10.29)$$

となる。右辺の 2 次の微小項を省略して整理すると

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{dV}{a} \qquad (10.30)$$

となる。

次に，波面前後の流れに運動量の法則を適用すると

$$\rho aA\{(a - dV) - a\} = A\{p - (p + dp)\}$$

よって

$$dp = \rho a dV \qquad (10.31)$$

となる。式(10.30)，(10.31)より

$$a^2 = \frac{dp}{d\rho} \tag{10.32}$$

となる。等エントロピーの関係式(10.23)の対数をとり，微分した式と状態方程式(10.1)を上式に代入すると

$$a^2 = \kappa\frac{p}{\rho} = \kappa RT \tag{10.33}$$

となり，式(10.32)と式(10.33)とから音速 a は

$$a = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} = \sqrt{\kappa\frac{p}{\rho}} = \sqrt{\kappa RT} \tag{10.34}$$

となる。したがって，音速 a は温度 T の関数で，その平方根に比例して増加し，また，温度は場所によって異なるから，音速も場所によって変化することがわかる。温度 293.15K の乾き空気の音速は，おおよそ a=343 m/s である。

なお，等エントロピー変化における音速 a は，一般的に次のように表される。

$$a = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial\rho}\right)_s} \tag{10.35}$$

また，式(10.27)，(10.28)の等エントロピー圧縮率 β_s および等エントロピー体積弾性係数 K_s を用いると，音速 a は

$$a = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} = \sqrt{\frac{1}{\rho\,\beta_s}} = \sqrt{\frac{K_s}{\rho}} \tag{10.36}$$

となる。

10.1.4　マッハ数

マッハ数（Mach number）は，圧縮性流体における重要な無次元量である。流れのある点における速度を V，その点における音速を a とすると，マッハ数 M は，次式で定義される。

$$M = \frac{V}{a} \tag{10.37}$$

10.1.5　音の伝ぱと圧縮性流れの分類

いま，静止大気中を飛行機などの物体，あるいは音源が一定速度 V で移動しているとする。ある時刻における音源は，時間の経過とともに移動した位置を

中心として音速 a で球状に広がりながら伝ぱする。図 10.3 に示すように，音源の移動速度 V と音速 a の違い，すなわちマッハ数 M の大きさによって音の伝ぱの状態が大きく変化する。

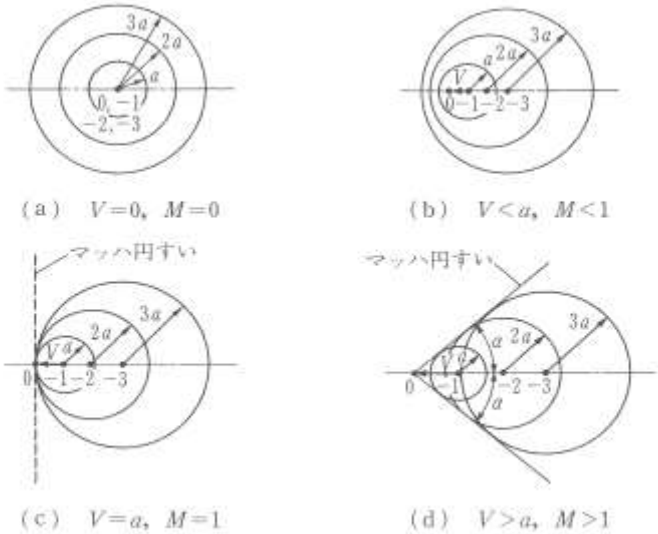

図10.3　音の伝ぱの状態

圧縮性流れは，マッハ数によって，次のように分類される。

（1）M＝0 ： 図 10.3(a)に示すように，音源が静止している場合で，音波は音源を中心として同心球面状に広がる。

（2）M＜1： **亜音速流**（subsonic flow）

気流の速度が音速よりも遅い流れで，上限のマッハ数はほぼ 0.8 程度である。また，図 10.3(b) に示すように，音源の移動速度が音速よりも遅い場合で，音源は過去に放射された音波を追い越すことはできない。観測者は，音源が近づくときには,振動数の高い音を聴き,遠ざかるときには低い音を聴くことになる。この現象を**ドップラー効果**（Doppler effect）という。

（3）M≒1 ： **遷音速流**（transonic flow）

マッハ数が 1 付近（0.8＜M＜1.2）の流れであり，亜音速流れと超音速流れが混在する不安定な流れである。また，図 10.3(c) に示すように，音源が音速と等しい速度(V=a，M=1)で移動している場合，音源の前方で音波の集積が生じて垂直な衝撃波が発生する。したがって，音波（微小じょう乱）は，この垂直な衝撃波の上流側へ伝わることはできない。

（４）$M>1$ ： **超音速流**（supersonic flow）

マッハ数が 1 よりも大きい流れで，気流の速度が音速よりも大きく，一般にはマッハ数が 1.2 より大きく 5 より小さい場合に現れる。温度や密度などの物理量が著しく変化して，衝撃波が発生する。図 10.3(d) に示すように，音源が音速よりも速い速度で移動しており，音源は過去に放射された音波を追い越すことになる。音波は円錐状の包絡面を形成し，包絡面の外側には音源の影響は現れない。すなわち，円錐の内部だけに音源の影響が現れることになる。この円錐を**マッハ円錐**（Mach cone）とよび，半頂角 α とマッハ数 M との間には

$$\sin\alpha = \frac{a}{V} = \frac{1}{M} \tag{10.38}$$

の関係がある。なお，角 α は**マッハ角**(Mach angle)とよばれ，流線に対して α だけ傾いた線を**マッハ線**(Mach line)あるいは**マッハ波**(Mach wave)という。したがって，マッハ円錐は，マッハ線によって構成された面である。

（５）$M>5$ ： **極超音速流**（hypersonic flow）

超音速流と区別され，運動エネルギーや状態量の変化が極めて顕著である。マッハ円錐と物体表面が極めて接近した状態になる。この流れの中に物体があるとき, 物体の先端には極めて強い衝撃波が生じ, 一般にこのような流れでは, 気体を完全気体として取扱うことはできない。